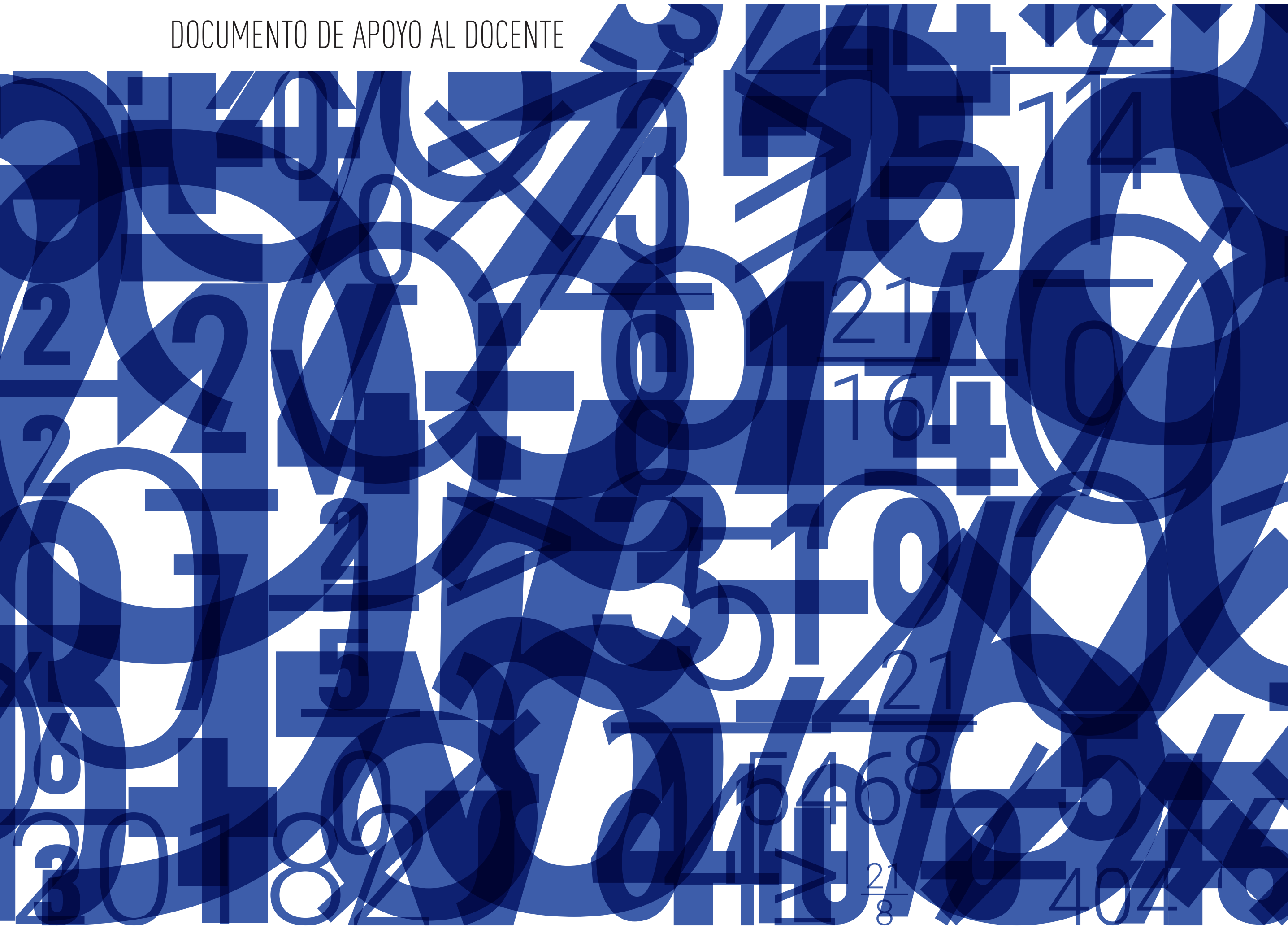
ARISTAS EN CLASE **2022**

Matemática en tercero de media

DOCUMENTO DE APOYO AL DOCENTE



INEEd
Instituto Nacional de Evaluación Educativa

Comisión Directiva del INEEd: Javier Lasida (presidente) y Pablo Caggiani

Directora del Área Técnica: Carmen Haretche
Directora de la Unidad de Evaluación Curricular: Andrea Rajchman

Las autoras de este documento son Ana Laura González y Raisa López.

Corrección de estilo: Federico Bentancor y Mercedes Pérez
Diseño y diagramación: Diego Porcelli

Montevideo, 2024

ISBN: 978-9915-9582-3-1

Edificio Los Naranjos, planta alta, Parque Tecnológico del LATU
Av. Italia 6201, Montevideo, Uruguay
(+598) 2604 4649 – 2604 8590
ineed@ineed.edu.uy
www.ineed.edu.uy

Cómo citar: INEEd (2024). *Aristas en Clase 2022: matemática en tercero de media. Documento de apoyo al docente*. Recuperado de https://www.ineed.edu.uy/images/Aristas/AristasEnClase/DocumentoDeApoyo/Aristas-en-clase-2022-Media-Matematica.pdf

Este informe trata de adolescentes y adultos mujeres y varones. El uso del masculino genérico obedece a un criterio de economía de lenguaje y procura una lectura más fluida, sin ninguna connotación discriminatoria.

Ingreso para docentes: aristasenclase.ineed.edu.uy
Ingreso para estudiantes: clase.ineed.edu.uy
Manual de uso

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

¿QUÉ ES ARISTAS Y QUÉ DATOS PROPORCIONAN LOS RESULTADOS DE LAS PRUEBAS?

Aristas, la evaluación nacional de logros educativos del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEEd), da cuenta del estado del sistema educativo uruguayo en cuanto a recursos, procesos y resultados. Periódicamente genera, analiza y presenta datos de tercero y sexto de educación primaria y de tercero de educación media (noveno grado de la educación básica integrada[1]) sobre las condiciones socioeconómicas y culturales de las familias de los estudiantes, la organización y el entorno escolar, la convivencia y la participación en los centros, las habilidades socioemocionales de los estudiantes, las oportunidades de aprendizaje que se les brindan y sus desempeños en lectura y matemática.

Los marcos conceptuales de Aristas para la evaluación de los desempeños fueron diseñados para medir las competencias lectora y matemática. Algunos de los insumos fundamentales para establecer el alcance de los marcos de la evaluación en tercero de media fueron los programas y documentos curriculares de la actual Dirección General de Educación Secundaria (DGES) y del ciclo básico tecnológico de la actual Dirección General de Educación Técnico Profesional (DGETP). Su elaboración estuvo a cargo del INEEd con el apoyo de comités de especialistas en cada área[2].

Cabe mencionar que los recientes cambios curriculares incluidos en la transformación educativa que se empezó a aplicar en 2023 son posteriores a la medición de Aristas Media 2022. Debido a esto, no están reflejados en los marcos conceptuales para las evaluaciones de desempeño de esta edición.

Un relevamiento de los programas de Matemática vigentes al 2022 y los implementados a partir del 2023 permitió identificar que aquellos contenidos y habilidades medidos en Aristas se mantienen en los nuevos documentos. Del mismo modo, se constató que son escasos los agregados respecto a los contenidos y habilidades relevados en el marco de matemática en tercero de educación media[3]. En este sentido, los resultados de las evaluaciones que corresponden al marco de Aristas son una referencia válida no solo en el contexto del cambio curricular, sino también respecto al nuevo currículo.

[1] A partir de 2023, y en el marco de la transformación educativa que se está implementando en Uruguay, el tercer año de educación media básica se denomina noveno grado de educación básica integrada.
[2] Aristas Media 2022 y Aristas en Clase Media 2022 están basadas en el marco de Aristas Media (INEEd, 2017), que está alineado a los programas vigentes al 2022 de la DGES y del ciclo básico tecnológico de la DGETP.
[3] Los contenidos incorporados a partir de 2023 en el plan de la educación básica integrada para la unidad curricular Matemática que no se relevan en Aristas hasta el momento son vectores, rotación, homotecia, funciones de segundo grado y matemática financiera. Esto se debe a que al momento de definir el marco de matemática para tercero de educación media dichas temáticas no estaban incluidas en los programas de ambos subsistemas. En futuras ediciones de Aristas y de Aristas en Clase se ajustarán los marcos para mantenerse alineados con los documentos curriculares vigentes.

La implementación de Aristas a través de pruebas estandarizadas de lectura y matemática permite identificar niveles de desempeño que describen lo que los estudiantes son capaces de hacer en forma progresiva. A partir de esta conceptualización, la evaluación del INEEd proporciona datos respecto a cómo se distribuyen los estudiantes de acuerdo a los distintos niveles de desempeño, tanto a escala nacional como en distintas poblaciones (por contexto socioeconómico y cultural, por tipo de curso, por región, por género y por edad). En este sentido, se trata de una herramienta válida para analizar los desempeños en lectura y matemática y, a su vez, para utilizar estos resultados como base para la reflexión acerca de política educativa y curricular, así como para la mejora pedagógica en los centros.

Cabe señalar que Aristas no es una herramienta válida para establecer conclusiones sobre centros educativos, docentes ni estudiantes en particular. Si bien tampoco pretende sustituir la evaluación que realizan los docentes en las aulas, puede ser un instrumento valioso para integrar a sus prácticas.

¿QUÉ ES ARISTAS EN CLASE?

Aristas en Clase es una herramienta desarrollada por el INEEd que permite relacionar los aportes de la evaluación estandarizada de los logros del sistema educativo con respecto a los desempeños en lectura y matemática en el día a día de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Se trata de una herramienta para que los docentes utilicen en línea, a fin de evaluar los desempeños de sus grupos de estudiantes en lectura y matemática y comparar sus resultados con los que fueron obtenidos a nivel nacional en 2022, en una muestra representativa de adolescentes de tercero de media.

Los materiales de Aristas en Clase no pretenden constituirse en actividades prediseñadas para suplir las iniciativas didácticas de los docentes o “entrenar a los alumnos para responder pruebas estandarizadas” (Ravela, 2009, p. 16 y 17). Teniendo en cuenta que la evaluación nacional del INEEd no tiene consecuencias para los centros educativos, los docentes ni los estudiantes, el uso más relevante que se les puede otorgar a estos materiales consiste en promover avances en los desempeños, más que en preparar a los estudiantes para este tipo de evaluaciones.

¿CUÁLES SON LOS APORTES PRINCIPALES DE ARISTAS EN CLASE?

Para que el uso de Aristas en Clase contribuya al avance en los logros de los estudiantes, en este documento se incluyen actividades que ejemplifican los niveles de desempeño. Asimismo, se brindan recursos que dan cuenta de cómo ocurre la progresión en el aprendizaje y los procesos cognitivos y los conocimientos involucrados en las actividades propuestas. Es decir, además de aportar información para comparar los porcentajes de estudiantes de una clase por nivel de desempeño, se ofrece la interpretación de los descriptores que constituyen cada uno de estos niveles y se los ejemplifica a partir de actividades de la prueba. De esta forma, la herramienta explicita que el avance en los aprendizajes de los estudiantes es posible si se trasciende el tipo de actividades que propone la propia evaluación estandarizada. Para esto, el actor clave es el docente, quien selecciona los recursos a emplear. Entre estos, las actividades de Aristas en Clase son solamente uno más de ellos.

El procedimiento basado en identificar el desarrollo cognitivo de los estudiantes está fuertemente arraigado en la tradición pedagógica, en la que la evaluación no pretende definir lo que son incapaces de hacer, sino servir de insumo para que los docentes puedan aprovechar y potenciar la "zona de desarrollo próximo" (Vygotsky, 1978, p. 211). Este documento ofrece una descripción detallada de las habilidades que constituyen la competencia matemática en tercero de educación media (actual noveno), para que el docente pueda relacionar los descriptores con las actividades concretas de enseñanza que esté desarrollando en el aula. Asimismo, los resultados obtenidos con Aristas en Clase pueden servir como referencia para planificar estrategias que consoliden estas habilidades y que promuevan otras de mayor complejidad. Las acciones pedagógicas pueden complementarse si el docente conoce las habilidades y los conocimientos implicados en cada una de estas actividades, es decir, interviene desde el análisis didáctico de los resultados obtenidos. Estas actividades constituyen un insumo, entre otros que el docente considere adecuados, para promover el aprendizaje de los estudiantes.

Dado que Aristas en Clase habilita la comparación de los resultados del grupo respecto a la muestra nacional y a los resultados por contexto socioeconómico y cultural, el docente podrá contar con otra herramienta para sumar a sus evaluaciones, que le permitirá conocer y comprender los aportes de las pruebas estandarizadas para la mejora de sus evaluaciones de aula y para consolidar la cultura institucional de evaluación (Ravela et al., 2008). Del mismo modo, el diagnóstico obtenido puede utilizarse como información útil a la hora de planificar las clases.

En el Manual de uso de Aristas en Clase se incluye información práctica sobre el uso y aplicación de las pruebas, así como para la visualización de resultados.

¿CÓMO SON LAS PRUEBAS DE ARISTAS EN CLASE?

La primera edición de Aristas en Clase en educación media, que se puso en funcionamiento en 2020, se elaboró a partir de la aplicación de 2018 de la evaluación nacional en ese nivel educativo. En 2022 se llevó a cabo la segunda evaluación nacional de Aristas en educación media y la presente edición de Aristas en Clase se nutre de sus resultados.

Se debe considerar que cada prueba de Aristas en Clase se elabora sobre la base de una selección de actividades de la evaluación nacional correspondiente. La prueba de matemática de Aristas Media 2022 estuvo compuesta por 240 actividades. Mientras, la prueba de matemática de Aristas en Clase 2022 está compuesta por 30 actividades, que se corresponden con la cantidad de tareas que resuelve cada estudiante en la evaluación nacional. En este sentido, cabe aclarar que este material no busca orientar hacia un recorte de temas o contenidos del currículo por sobre otros que no hayan sido incluidos en Aristas en Clase, y que puedan ser igualmente relevantes.

¿CUÁLES SON LOS USOS POSIBLES DE ARISTAS EN CLASE?

El docente del grupo podrá realizar distintos usos de los instrumentos y los resultados de Aristas en Clase. Un empleo posible es proponer al grupo alguna de las pruebas disponibles, analizar sus resultados y generar avances a partir de los comentarios y sugerencias integrados en los documentos de apoyo correspondientes. Asimismo, debido a que actualmente ya se cuenta con dos versiones de prueba de Aristas en Clase de matemática para tercero de media (2018 y 2022), el docente también puede seleccionar y combinar las actividades y los documentos de apoyo de ambas ediciones para complementar el diagnóstico del grupo, así como las sugerencias y estrategias para promover avances entre sus estudiantes.

Otra oportunidad que surge con Aristas en Clase es la generación de espacios de discusión entre docentes, con directores, inspectores y otros actores del sistema educativo, con la finalidad de reflexionar sobre posibles abordajes para promover avances en los aprendizajes. Favorecer que se generen estos espacios de intercambio constituye uno de los principales objetivos de la herramienta. En esta línea, los documentos de apoyo al docente proponen la interpretación de los resultados de la prueba a nivel de grupo y también por actividad respecto a los procesos cognitivos puestos en juego.

Aunque las pruebas de Aristas y Aristas en Clase son diseñadas para estudiantes de tercero de media, esto no implica que no puedan ser aplicadas e interpretadas por docentes que tengan otros grados a cargo. A modo de ejemplo, las actividades, evaluaciones y materiales de esta prueba podrían ser un insumo relevante para docentes del grado anterior o el posterior.

Resulta relevante explicitar que los resultados que aporta Aristas en Clase no permiten conocer el desempeño particular de cada estudiante, sino del grupo en su totalidad. Esto obedece a distintos factores: por un lado, el objetivo de Aristas no es dar cuenta del logro de cada estudiante, sino de los resultados a nivel agregado, fundamentalmente para el monitoreo de los logros del sistema educativo, y, por otro lado, reconocer este alcance implica también aceptar la limitación de los instrumentos de evaluación estandarizada de múltiple opción, ya que no son capaces de informar con exactitud qué sabe un estudiante cuando responde una cantidad relativamente pequeña de actividades[4].

En suma, Aristas en Clase es una herramienta que busca apoyar y complementar el trabajo del docente en el aula. Por esta razón, articula la divulgación de los resultados de la evaluación nacional con la presentación de insumos que fortalecen la práctica pedagógica guiada por la evidencia y la reflexión en torno a los resultados de las evaluaciones.

[4] Las evaluaciones estandarizadas de pocas actividades sí pueden dar cuenta del logro de cada individuo cuando se realizan test adaptativos. Aristas en Clase no plantea esta opción, no solamente porque su objetivo no lo requiere, sino porque la devolución de resultados por estudiante se justifica si se espera que estos tengan consecuencias en la toma de decisiones del docente sobre cada uno. En Aristas en Clase es el docente quien establece la relación entre los desempeños de cada adolescente con el desempeño del grupo.

LA COMPETENCIA MATEMÁTICA Y SUS DIMENSIONES

En la evaluación nacional Aristas se entiende como competencia matemática a la capacidad de resolver planteos matemáticos enmarcados en distintas situaciones; poniendo en juego información, habilidades, emociones y actitudes, e involucrando el saber sobre los contenidos y el saber actuar intencionalmente con ellos (qué hacer, cómo, cuándo y por qué). Para dar cuenta de su competencia, los estudiantes deben ser capaces de indagar matemáticamente sobre diferentes realidades, desarrollar estrategias, discutir su pertinencia, determinar el rango de datos que se necesitan para aprehenderlas, establecer relaciones entre ellos, manejar conceptos matemáticos aprendidos, analizar regularidades y patrones, generalizar, explicar, conjeturar, comunicar, disponer de distintas representaciones de los objetos matemáticos, argumentar y defender posiciones propias y analizar la viabilidad de las de otros (INEEd, 2017).

La competencia matemática de Aristas involucra tres dimensiones: información, aplicación y comprensión. Estas dimensiones son inclusivas, ya que los procesos cognitivos involucrados en información (recordar, recuperar e identificar información) son necesarios en la dimensión aplicación (ejecutar y aplicar rutinas y procedimientos matemáticos), que a su vez son necesarios para la dimensión comprensión (analizar, generalizar, establecer conexiones, clasificar y justificar matemáticamente) (INEEd, 2017).

En la prueba de Aristas para tercer año de educación media estas tres dimensiones de la competencia matemática se desagregan por bloque temático (Medidas, Estadística y probabilidad, Geometría, Álgebra y Aritmética) dando lugar a 18 dominios.

TABLA 1

DOMINIOS EVALUADOS EN MATEMÁTICA EN TERCERO DE EDUCACIÓN MEDIA

COMPETENCIA MATEMÁTICA			
Los estudiantes resuelven planteos matemáticos enmarcados en distintas situaciones, poniendo en juego conocimientos, habilidades, emociones y actitudes, involucrando el saber sobre los contenidos y el saber actuar intencionalmente con ellos (qué hacer, cómo, cuándo y por qué hacerlo).			
DIMENSIONES	**INFORMACIÓN** Los estudiantes reconocen información matemática básica, convenciones y representaciones de los objetos matemáticos. Son capaces de recordar, recuperar e identificar dicha información.	**APLICACIÓN** Los estudiantes usan sus conocimientos para ejecutar y aplicar rutinas matemáticas necesarias y procedimientos (algoritmos de cálculo, fórmulas matemáticas o trazados).	**COMPRENSIÓN** Los estudiantes resuelven situaciones matemáticas para las cuales debe establecer relaciones, validar o elaborar procedimientos y validar afirmaciones.
BLOQUES TEMÁTICOS	**DOMINIOS**		
MAGNITUDES Y MEDIDAS	Reconocen relaciones o propiedades para el cálculo de medidas.	Aplican relaciones o propiedades para el cálculo de medidas.	Resuelven situaciones que implican utilizar relaciones métricas entre elementos de una figura.
ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD	Estadística		
	Reconocen información estadística explícita presentada en distintos formatos.	Procesan y organizan información estadística.	Toman decisiones basándose en la interpretación de información estadística.
	Probabilidad		
	Reconocen fenómenos aleatorios y diferentes tipos de sucesos.	Asignan probabilidades a sucesos.	Toman decisiones basándose en la interpretación de la probabilidad de un suceso y sus propiedades.
GEOMETRÍA	Reconocen figuras, sus elementos y distintas representaciones.	Establecen relaciones entre figuras usando propiedades de las figuras o de las transformaciones.	Resuelven problemas geométricos basándose en propiedades de las figuras o de las transformaciones.
ÁLGEBRA	Reconocen diferentes representaciones de funciones.	Realizan cálculos algebraicos y numéricos asociados y usan patrones.	Modelizan e interpreta situaciones usando enfoque algebraico.
ARITMÉTICA	Reconocen distintas representaciones de los números racionales y de las propiedades de las operaciones.	Establecen relaciones de orden y calculan, usando números racionales.	Resuelven y modelizan situaciones que implican el uso de los números racionales y la relación de proporcionalidad.

LOS NIVELES DE DESEMPEÑO PARA MATEMÁTICA EN TERCER AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA

En tercer año de educación media se definieron cinco niveles de desempeño[5]. Para cada uno se explicita cuáles son sus actividades representativas, lo que permite determinar cuáles son los logros de los estudiantes pertenecientes a cada nivel. En la tabla 2 se presentan los niveles de desempeño elaborados en 2018 con algunos ajustes sobre la prueba de 2022. Los descriptores que aparecen en los niveles de desempeño provienen de desagregar en progresiones los distintos dominios que conforman la habilidad matemática.

Los niveles son acumulativos, por lo que se considera que lo realizado en determinado nivel incluye lo realizado en el anterior. Asimismo, se puede hacer un seguimiento de cada una de las progresiones de las habilidades en los distintos niveles. Por ejemplo, la habilidad del bloque temático Álgebra contenida en el nivel 4 "Validan la solución de una ecuación de primer grado en relación con la situación que modeliza" tiene su antecedente en el nivel 3, en el descriptor "Resuelven ecuaciones de primer grado con solución racional".

[5] Los niveles de desempeño fueron elaborados por los técnicos del INEEd en conjunto con especialistas de distintas áreas de la educación. Estos niveles surgen de una interpretación de los programas oficiales de ciclo básico de las actuales DGES y DGETP y los documentos orientadores sobre expectativas de logro y nuevas miradas a los programas de ciclo básico. Ninguno de los niveles es o puede ser asemejado a un desempeño suficiente o esperable para el egreso, ya que es competencia de la Administración Nacional de Educación Pública definir qué es suficiente y aceptable.

TABLA 2

NIVELES DE DESEMPEÑO DE MATEMÁTICA EN TERCER AÑO DE EDUCACIÓN MEDIA

Bloque temático	Nivel 1 Más de 157 y hasta 230 puntos	Nivel 2 Más de 230 y hasta 312 puntos	Nivel 3 Más de 312 y hasta 356 puntos	Nivel 4 Más de 356 y hasta 390 puntos	Nivel 5 Más de 390 puntos
Medidas		Reconocen la propiedad de la suma de ángulos interiores de un triángulo y que los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.	Reconocen propiedades sobre ángulos, vinculadas a polígonos y a posiciones relativas entre rectas en el plano, y las aplican para su cálculo.	Reconocen y aplican propiedades de figuras geométricas planas vinculadas a lados y ángulos. Aplican simultáneamente distintas propiedades de figuras planas para el cálculo de amplitudes angulares. Aplican el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa en triángulos rectángulos.	Reconocen relaciones entre las medidas de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo rectángulo. Aplican razones trigonométricas para calcular medidas de lados y amplitudes angulares en triángulos rectángulos. Resuelven situaciones que involucran el uso del teorema de Pitágoras y propiedades de figuras planas. Elaboran argumentos usando el teorema de Pitágoras.
		Aplican la fórmula para calcular el área de un círculo.	Toman decisiones que involucran la comparación y aproximación de áreas y volúmenes.		Establecen relaciones de dependencia entre el área y volumen de una figura.
Estadística	Extraen información explícita de un listado de datos, tablas y gráficos sencillos.	Extraen información implícita sencilla de gráficos y tablas o relacionando ambas representaciones. Calculan la cantidad de elementos de un conjunto de datos presentados en un gráfico. Relacionan distintas formas de presentar datos estadísticos (tabla de frecuencias, conjunto de datos, gráfico).	Extraen información implícita de gráficos y tablas o relacionando ambas representaciones. Reconocen formatos de presentación y de organización de datos estadísticos que favorecen su correcta interpretación. Interpretan información estadística desde gráficos o tablas	Interpretan información estadística implicando el análisis conjunto de gráficos y tablas.	Interpretan información estadística implicando el análisis conjunto de gráficos, tablas y medidas de tendencia central.
			Calculan la media aritmética a partir de un listado de datos y obtienen la moda.		Calculan la media aritmética a partir de un gráfico, la mediana a partir de una tabla y el rango de un conjunto de datos. Interpretan el significado de medidas de tendencia central, cómo pueden variar al modificarse los datos y establecen relaciones usando sus propiedades.
Probabilidad		Dada la probabilidad de un suceso en lenguaje natural, la expresan numéricamente. Relacionan sucesos definidos por comprensión y extensión. Reconocen si un suceso es imposible o seguro.	Reconocen el espacio muestral de una situación aleatoria simple, el grado de posibilidad de ocurrencia de un suceso y entre varios cuál tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir. Reconocen situaciones aleatorias en las que los resultados posibles son equiprobables. Obtienen la fracción que representa la probabilidad de un suceso, a partir de su frecuencia de ocurrencia o a partir del cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles (ley de Laplace).	Obtienen la probabilidad de un suceso.	Toman decisiones utilizando la probabilidad de sucesos. Argumentan sobre la probabilidad de un suceso usando sus propiedades básicas.
Geometría	Reconocen posiciones relativas entre rectas, conos en posición convencional y cantidad de caras de prismas.	Relacionan dos representaciones de una figura del espacio (descripción, nombre, perspectiva, desarrollo plano). Reconocen triángulos congruentes.		Reconocen líneas y puntos notables en triángulos.	Resuelven situaciones apelando a las propiedades de líneas y puntos notables de triángulos. Reconocen triángulos semejantes.
		Describen paralelogramos usando sus propiedades.	Relacionan un paralelogramo y la mediatriz de un segmento con un respectivo programa de construcción.	Describen figuras planas y prismas usando sus propiedades. Interpretan propiedades de triángulos y rectángulos a partir de relaciones entre sus elementos. Resuelven situaciones que implican la interpretación de propiedades de prismas y pirámides, vinculadas a la forma y cantidad de sus caras.	Interpretan propiedades de cuadriláteros y circunferencias a partir de las relaciones entre sus elementos. Reconocen propiedades de figuras del espacio. Reconocen y aplican distintos criterios de clasificación de figuras apelando a sus propiedades. Resuelven situaciones que implican la interpretación conjunta de propiedades de figuras planas y del espacio para el reconocimiento de secciones planas.
		Reconocen centro o ejes de simetría en figuras planas e identifican situaciones de simetría axial.	Reconocen propiedades del centro o del eje de simetría de una figura plana. Aplican propiedades de las simetrías para resolver situaciones sencillas. Relacionan una figura plana con su imagen a través de una simetría axial o central.	Relacionan una figura plana con su imagen a través de una traslación.	Elaboran argumentos usando propiedades de las isometrías.

Bloque temático	Nivel 1 Más de 157 y hasta 230 puntos	Nivel 2 Más de 230 y hasta 312 puntos	Nivel 3 Más de 312 y hasta 356 puntos	Nivel 4 Más de 356 y hasta 390 puntos	Nivel 5 Más de 390 puntos
Álgebra		Continúan secuencias numéricas a partir de un patrón dado. Expresan generalizaciones en lenguaje natural vinculadas a secuencias aritméticas o geométricas sencillas.	Expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos sociales, que se pueden modelizar utilizando funciones y ecuaciones de primer grado. Expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos geométricos. Expresan generalizaciones en lenguaje algebraico que involucran secuencias aritméticas.	Expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos sociales, que se pueden modelizar utilizando ecuaciones de segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.	Expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos matemáticos, que se pueden modelizar utilizando funciones lineales, ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
		Calculan el valor numérico de expresiones algebraicas de una variable y de primer grado.	Calculan valores numéricos de expresiones algebraicas, y realizan adiciones y sustracciones entre ellas.	Realizan operaciones entre expresiones algebraicas.	
		Relacionan un punto en el plano con sus coordenadas cartesianas.	Reconocen la expresión analítica y el gráfico de una función lineal. Relacionan la representación gráfica y la tabla de valores de una función lineal.	Relacionan la expresión analítica con la tabla de valores o con la representación gráfica de una función lineal. Analizan e interpretan el modelo de la función lineal con relación a la situación social que modeliza.	Analizan e interpretan el modelo de la función lineal ($f(x) = ax + b$, con a y b números reales) con relación a la situación que modeliza.
		Resuelven ecuaciones de primer grado del tipo $ax + b = cx + d$, con solución entera.	Resuelven ecuaciones de primer grado con solución racional y situaciones contextualizadas sencillas a partir de la expresión algebraica de una función lineal.	Validan la solución de una ecuación de primer grado en relación con la situación que modeliza. Identifican el conjunto solución de una ecuación de segundo grado y el de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Interpretan las soluciones de una ecuación de segundo grado y la solución de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en relación con la situación que modeliza.	Argumentan sobre la validez del conjunto solución de ecuaciones de primer y segundo grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, en relación con la situación que modeliza.
Aritmética	Reconocen el opuesto de un número entero.	Ordenan números enteros. Reconocen el opuesto y el valor absoluto de un número racional.	Reconocen representaciones de números racionales en distintos registros. Argumentan sobre la equivalencia de fracciones. Resuelven situaciones que implican aproximaciones decimales.		
		Reconocen aplicaciones de las propiedades de las operaciones entre números racionales. Realizan operaciones combinadas entre números enteros o entre decimales, que implican adición, sustracción, multiplicación y división.	Realizan operaciones combinadas entre números enteros (incluyendo potencias) y operaciones combinadas entre fracciones.	Realizan operaciones combinadas entre números racionales que están escritos en distinto registro.	
		Resuelven situaciones simples de proporcionalidad directa.	Resuelven situaciones que conllevan varios pasos usando proporcionalidad directa.		
			Argumentan sobre relaciones entre múltiplos y divisores.		

CARACTERÍSTICAS DE LAS ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA DE TERCERO DISPONIBLES EN ARISTAS EN CLASE

Para la evaluación nacional de tercer año de educación media en matemática realizada en el año 2022 se elaboraron 16 cuadernillos con un total 240 actividades. Cada uno de estos cuadernillos dio cuenta de todas las características que aparecen en la tabla de dominios (tabla 1) y fueron aplicados a diferentes grupos de estudiantes durante la evaluación nacional.

Aristas en Clase de tercero de media proporciona una prueba compuesta por actividades seleccionadas de Aristas Media 2022[6]. La prueba está compuesta por 30 actividades, 28 de ellas de opción múltiple y dos de respuesta construida por el estudiante. En la tabla 3 se observa la distribución de estas actividades con referencia a las tres dimensiones de la competencia matemática, a sus dominios y a los cinco niveles de desempeño definidos.

Para cada una de las actividades incluidas en la prueba de Aristas en Clase se describen algunos procedimientos que los estudiantes pueden haber realizado en la resolución. Estos se presentan en una tabla en la que se muestra también el porcentaje de estudiantes que eligió cada una de las opciones de respuesta proporcionadas. Además, se mencionan posibles procesos cognitivos que pueden haber sido puestos en juego para su resolución. Sin embargo, el análisis no es exhaustivo en cuanto a los procedimientos y procesos cognitivos posibles. El docente podrá también considerar otros caminos de resolución para enriquecer la interpretación de los resultados obtenidos por su grupo de estudiantes.

[6] Debido a la situación transitada en 2020 y 2021 en relación con la emergencia sanitaria producto del COVID-19, el INEEd definió no realizar un operativo piloto en el período de pandemia y, por lo tanto, aplicar en 2022 una prueba muy similar a la realizada en 2018. El 35% de los ítems de la prueba de 2022 fueron nuevos respecto a la del 2018, debido a la necesidad de reemplazar ítems que fueron liberados y retirados de la edición anterior.

TABLA 3

DISTRIBUCIÓN DE LAS ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA PARA TERCER AÑO SEGÚN LOS DOMINIOS DE LA COMPETENCIA, POR NIVEL DE DESEMPEÑO

Información	Aplicación	Comprensión

Bloque temático	Dominio	Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5
Medidas	Reconocen relaciones o propiedades para el cálculo de medidas				Actividad 1	Actividad 3
	Aplican relaciones o propiedades para el cálculo de medidas		Actividad 4		Actividad 2	
	Resuelven situaciones que implican utilizar relaciones métricas entre elementos de una figura			Actividad 5		
Estadística y probabilidad - Estadística	Reconocen información estadística explícita presentada en distintos formatos	Actividad 6				
	Procesan y organizan información estadística		Actividad 7	Actividad 9		Actividad 10
	Toman decisiones basándose en la interpretación de información estadística			Actividad 8		
Estadística y probabilidad - Probabilidad	Reconocen fenómenos aleatorios y diferentes tipos de sucesos		Actividad 11			
	Asignan probabilidades a sucesos		Actividad 12	Actividad 13		
	Toman decisiones basándose en la interpretación de la probabilidad de un suceso y sus propiedades					Actividad 14
Geometría	Reconocen figuras, sus elementos y distintas representaciones	Actividad 15	Actividad 16			
	Establecen relaciones entre figuras usando propiedades de las figuras o de las transformaciones			Actividad 17		
	Resuelven problemas geométricos basándose en las propiedades de las figuras o de las transformaciones			Actividad 19	Actividad 18	
Álgebra	Reconocen diferentes representaciones de funciones			Actividad 20		
	Realizan cálculos algebraicos y numéricos asociados y usan patrones		Actividad 21	Actividad 22	Actividad 23	
	Modelizan e interpretan situaciones usando enfoque algebraico		Actividad 24	Actividad 25	Actividad 26	
Aritmética	Reconocen distintas representaciones de los números racionales y de las propiedades de las operaciones			Actividad 28		
	Establecen relaciones de orden y calculan, usando números racionales		Actividad 27	Actividad 30		
	Resuelven y modelizan situaciones que implican el uso de los números racionales y la relación de proporcionalidad		Actividad 29			

Nota: las actividades de esta tabla están numeradas por el orden en que se presentan en el documento, que está relacionado con el análisis didáctico de las actividades; en la prueba de Aristas en Clase que realizan los estudiantes el orden obedece a criterios como la dificultad, la distribución de las respuestas correctas, la dimensión, entre otros.

LAS ACTIVIDADES DE MATEMÁTICA: ANÁLISIS DE SU PROGRESIÓN POR BLOQUE TEMÁTICO Y NIVEL DE DESEMPEÑO

En este documento se presenta una breve descripción de los aspectos que se abordan en cada bloque temático y de las progresiones de los niveles de desempeño en cada uno, además de actividades que sirven como ejemplo para describir estas progresiones. Este análisis se realiza a partir del *Marco de matemática en tercero de educación media* (INEEd, 2017).

En las actividades seleccionadas se optó por simplificar la redacción de las consignas omitiendo, en muchos casos, formalismos matemáticos para favorecer la comprensión de las actividades por parte de los estudiantes que participan de la prueba. Se debe tener en cuenta que en la evaluación nacional los estudiantes resuelven la prueba en forma individual y sin el apoyo de un docente, a diferencia de lo que sucede habitualmente en el aula. Tampoco tienen acceso a materiales teóricos ni fórmulas para la resolución, como el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales, las relaciones trigonométricas, el cuadrado de un binomio, entre otros. Sin embargo, sí cuentan con calculadora científica y hojas para hacer planteos, que no se consideran en la corrección de la evaluación.

MEDIDAS

Este bloque temático está centrado en las medidas de magnitudes geométricas. Incluye el uso de las razones trigonométricas en triángulos rectángulos, el teorema de Pitágoras, el teorema de Tales y las propiedades métricas de figuras geométricas, con la finalidad de calcular longitudes y amplitudes angulares. Además, se incluye el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes y sus relaciones.

Los descriptores del bloque temático Medidas (tabla 2) se distribuyen entre los niveles 2 y 5 de desempeños. Como ejemplo de lo que pueden hacer los estudiantes, se describen algunos desempeños en cada nivel.

En el nivel 2 los estudiantes aplican fórmulas para calcular áreas de círculos y reconocen propiedades simples de ángulos en triángulos y en paralelogramos. En el nivel 3 reconocen propiedades sobre ángulos vinculadas a polígonos y a posiciones relativas entre rectas y las aplican para su cálculo. Además, toman decisiones que involucran la comparación y aproximación de áreas y volúmenes. En el nivel 4 los estudiantes reconocen y aplican propiedades de figuras geométricas planas vinculadas a lados y ángulos y las utilizan para calcular amplitudes angulares. A su vez, aplican el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa en triángulos rectángulos. Por último, en el nivel 5 reconocen relaciones entre las medidas de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo rectángulo y aplican razones trigonométricas para calcular medidas de lados y amplitudes angulares en estos triángulos. Asimismo, resuelven situaciones que implican el uso del teorema de Pitágoras y de propiedades de figuras planas.

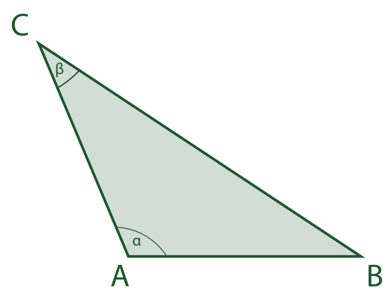
Los matices entre un nivel y otro están relacionados con el grado en que los estudiantes logran reconocer propiedades de figuras geométricas, su aplicación para el cálculo de magnitudes y la validación de argumentos que establezcan relaciones entre elementos de las figuras.

En esta prueba de Aristas en Clase se incluyen cinco actividades del bloque Medidas dentro de dos progresiones. Una de ellas hace foco en las propiedades métricas de las figuras planas relacionadas a lados y ángulos, las relaciones trigonométricas y el teorema de Pitágoras. La segunda progresión se centra en la aplicación de fórmulas para calcular áreas y volúmenes y establecer relaciones entre ellos.

En las actividades 1, 2 y 3 se muestran ejemplos de la progresión centrada en las propiedades métricas de las figuras planas.

Actividad 1 Nivel 4

En el siguiente triángulo el lado AB mide igual que el lado AC.



¿Cuál de las siguientes expresiones indica la amplitud del ángulo α?

A) β

B) $180° - \beta$

C) 2β

D) $180° - 2\beta$

Bloque temático		Medidas	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen relaciones o propiedades para el cálculo de medidas	
Descriptor		Reconocen propiedades de figuras geométricas planas vinculadas a lados y ángulos	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	β	Reconocen que el triángulo es isósceles, que los ángulos de vértices B y C tienen igual amplitud, y responden con dicha amplitud.	12,6
B	180° - β	Reconocen que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y a esta suma le restan la amplitud del ángulo dado.	39,8
C	2β	Reconocen que el triángulo es isósceles, que los ángulos de vértices B y C tienen igual amplitud y responden con la suma de ambas amplitudes, omitiendo que deben restarlas a 180°.	16,9
D	180° - 2β	**RESPUESTA CORRECTA** Reconocen la propiedad de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°. Reconocen que el triángulo es isósceles y que, por lo tanto, los ángulos de vértices B y C tienen igual amplitud. Responden que la amplitud del ángulo de vértice A debe ser 180° menos el doble de la amplitud del ángulo de vértice C.	**25,4**
Sin respuesta			5,3
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes reconocen que el triángulo ABC es isósceles en A, tomando en cuenta que los lados AB y AC son de igual medida. Identifican que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° y que, por lo tanto, se puede obtener el ángulo α. El 25,4% de los estudiantes responde correctamente identificando que se obtiene restando el doble de β a 180° (opción D), ya que al ser un triángulo isósceles los ángulos BCA y ABC tienen igual amplitud.

El 39,8% de los estudiantes responde con una relación similar a la clave (opción B), restando β a 180°, como si los ángulos de amplitud α y β fueran suplementarios. Por su parte, un 16,9% de los estudiantes reconocen que como el triángulo es isósceles tiene dos ángulos iguales de amplitud β y para calcular el ángulo pedido contestan con el doble del ángulo β omitiendo restar este valor a 180 (opción C). En menor proporción (12,6%) responden que $\alpha = \beta$, confundiendo con la relación entre los ángulos de un triángulo equilátero, en vez de isósceles (opción A).

Esta actividad es de la dimensión información y da cuenta del nivel 4 de desempeños, al involucrar el reconocimiento de propiedades de un triángulo vinculadas a sus lados y ángulos. En la misma progresión, pero en el nivel 2, se pueden encontrar tareas donde se reconoce, por ejemplo, la propiedad de la suma de los ángulos interiores a un triángulo. Por su parte, en el nivel 3 se ubican tareas en las que los estudiantes deben reconocer propiedades sobre ángulos vinculadas a polígonos y a posiciones relativas entre rectas, además de aplicarlas para calcular ángulos. En la edición 2018 de Aristas en Clase hay ejemplos de estas actividades (INEEd, 2020b, p. 23).

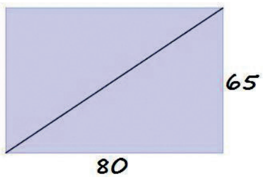
Otro desempeño de esta progresión centrada en las relaciones entre lados y ángulos de polígonos incluye el reconocimiento y la aplicación del teorema de Pitágoras, como se muestra en la actividad 2.

Actividad 2 Nivel 4

Emilio construye su casa y las ventanas que colocará son rectangulares.

Mientras su casa esté en construcción, colocará por seguridad barras de hierro en diagonal.

Si la altura de la ventana es de 65 cm y el largo es de 80 cm, ¿cuánto mide su diagonal aproximadamente?



A) 145

B) 103

C) 95

D) 47

Bloque temático		Medidas	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Aplican relaciones o propiedades para el cálculo de medidas	
Descriptor		Aplican el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la hipotenusa en triángulos rectángulos	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	145	Suman las medidas de los lados del rectángulo: 65 + 80 = 145.	40,4
B	103	**RESPUESTA CORRECTA** Aplican el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la diagonal del rectángulo. Identifican que la diagonal del rectángulo determina un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 80 y 65. Realizan: $x = \sqrt{80^2 + 65^2} \simeq 103$.	**31,8**
C	95	Suman la medida del cateto mayor y la diferencia entre la medida de los catetos. Realizan: 80 + (80 - 65) = 80 + 15 = 95.	21,0
D	47	Consideran al cateto mayor como hipotenusa y luego calculan $x^2 + 65^2 = 80^2 \Rightarrow x^2 = 80^2 - 65^2 \Rightarrow x = \sqrt{2175} \simeq 47$.	4,9
Sin respuesta			1,9
Total			100

Los estudiantes que resuelven correctamente esta actividad reconocen que la diagonal del rectángulo es la hipotenusa de un triángulo rectángulo y aplican el teorema de Pitágoras para calcular su medida.

El 31,8% responde correctamente (opción B), aplicando el teorema y obteniendo que la diagonal del rectángulo mide 103 cm. Por otra parte, el 40,4% responde que la medida de la diagonal se corresponde con la suma de las medidas de los lados del rectángulo (opción A). Asimismo, un 21% de los estudiantes elige la opción C, donde la diagonal mide 95.

Estos estudiantes podrían sumar la medida del cateto mayor (80) y la diferencia entre las medidas de los catetos (80 - 65 = 15) para obtener este valor. Por último, hay un 4,9% de los estudiantes que para calcular la diagonal del rectángulo consideran al cateto mayor del triángulo como hipotenusa, sustituyendo con error en la fórmula (opción D).

Esta actividad de la dimensión aplicación corresponde al nivel 4 de desempeños, ya que involucra no solo recordar la relación de Pitágoras, sino aplicarla correctamente para calcular la longitud de un segmento. Continuando la progresión, en el nivel 5 se pueden encontrar actividades donde los estudiantes deben resolver situaciones o elaborar argumentos, utilizando el teorema de Pitágoras. Un ejemplo de este desempeño que se presentó en Aristas en Clase 2018 se muestra a continuación.

Luego de realizar algunas mediciones Diego sabe que la diagonal de la siguiente ventana mide 160 cm.

¿Es rectangular la ventana?

A) No es rectangular, porque $60^2 + 130^2$ no da 160^2.
B) No es rectangular, porque $\sqrt{60 + 130}$ no da 160.
C) Sí, es rectangular porque 160 es más grande que 60 y que 130.
D) Sí, es rectangular porque la diagonal se calcula haciendo $\sqrt{60^2 + 130^2}$.

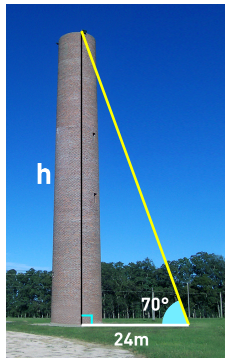
Fuente: INEEd (2020b, p. 28).

Otro desempeño de esta progresión con foco en las relaciones entre lados y ángulos de figuras se encuentra en la actividad 3 e involucra las relaciones trigonométricas.

Actividad 3 Nivel 5

Un tanque de agua proyecta una sombra de 24 metros en el suelo cuando los rayos del sol forman un ángulo de 70° con la horizontal, como muestra la imagen.

Sin hacer cálculos, escribe la relación trigonométrica que permite calcular en forma directa la altura h del tanque.



Bloque temático	Medidas	
Dimensión	Información	
Dominio	Reconocen relaciones o propiedades para el cálculo de medidas	
Descriptor	Reconocen relaciones entre las medidas de los lados y las amplitudes de los ángulos de un triángulo rectángulo	
Opciones	Justificación	Porcentaje de respuestas
Crédito total	**RESPUESTAS CORRECTAS** Se consideran correctas aquellas respuestas que mencionan la tangente del ángulo dado o de su complemento (20°) o la relación tangente, aunque no mencione el ángulo. También aquellos procedimientos que usen correctamente coseno y seno para obtener la altura. Además, se aceptan respuestas que incluyan solo el número 66 (o cualquier número en el intervalo [64,8; 67,2]), o bien la razón entre los lados que definen a la tangente. Ejemplos de respuestas correctas. • Tg 70° • Tg 20° • Tangente. • Coseno para saber la hipotenusa y después el seno para saber el cateto opuesto. • Tg 70 = h/24 entonces h = 2,75 x 24 = 66. • Tg70 = cateto adyacente/cateto opuesto • Tg 20 = h/24 • 66 • h/24 • Cateto opuesto/cateto adyacente Nota: se aceptan respuestas que incluyan despejes correctos o incorrectos, con la relación bien planteada, o con los lados invertidos; no es necesario obtener la altura del tanque.	**7,6**
Sin crédito	RESPUESTAS INCORRECTAS Se consideran incorrectas aquellas respuestas donde no aparece explícitamente la palabra tangente o la relación correcta entre los lados. También, aquellas que incluyan un ángulo diferente de 70° o 20°. Ejemplos de respuestas incorrectas. • 70. • Cos 70° = 24/h • Seno • Cateto opuesto. • Tangente de 24. • Trigonometría. • 1.680. • Cateto opuesto por el ángulo. • Teorema de Pitágoras.	49,9
Sin respuesta		42,5
Total		100

Esta actividad de respuesta construida por los estudiantes, de la dimensión información, exige recordar las relaciones trigonométricas de un triángulo rectángulo en una situación contextualizada.

Solamente el 7,6% de los estudiantes responde con la relación tangente, que permite calcular la altura del tanque de forma directa (crédito total). Estos estudiantes reconocen que la altura del tanque es la medida del cateto opuesto al ángulo de 70° y la medida de la sombra proyectada es la medida del cateto adyacente, dando lugar a la identificación de la relación tangente como el cociente entre ambas.

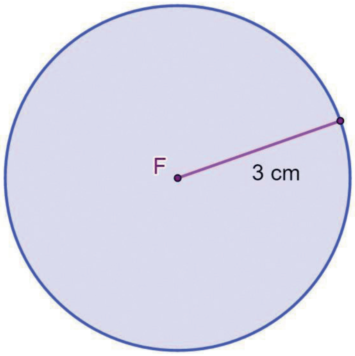
Por otra parte, alrededor de la mitad de los estudiantes responden con otras relaciones trigonométricas erróneas o manifiestan que no lo saben y un 42,5% deja la actividad sin responder. Esto puede dar cuenta de que no recuerdan la relación, ya que más del 90% de los estudiantes no lo responden correctamente, o bien que no la han trabajado en clase todavía al momento de la aplicación de la prueba.

Esta actividad da cuenta del nivel 5 de desempeños por referir a la identificación de las relaciones trigonométricas. Dentro del nivel 5 también se encuentran actividades para calcular lados y ángulos en triángulos rectángulos, utilizando las relaciones trigonométricas.

A continuación, se presentan dos actividades de este bloque que ejemplifican la progresión de Medidas, que está centrada en el cálculo del área y volumen de figuras y en la toma de decisiones que involucran la relación entre estas medidas.

Actividad 4 Nivel 2

El círculo de centro F tiene un radio de 3 cm.



¿Con cuál de estos planteos se puede calcular el **área** del círculo?

A) $\pi.3^2$

B) $2.\pi.3$

C) $3.\dfrac{\pi}{2}$

D) $3.\pi^2$

Bloque temático		Medidas	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Aplican relaciones o propiedades para el cálculo de medidas	
Descriptor		Aplican la fórmula para calcular el área de un círculo	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	$\pi.3^2$	**RESPUESTA CORRECTA** Recuerdan la fórmula para calcular el área del círculo: $\pi.r^2$, reconocen que el radio es 3 centímetros y eligen en consecuencia la opción $\pi.3^2$.	**43,0**
B	$2.\pi.3$	Eligen el planteo donde se calcula el perímetro del círculo en vez del área.	13,5
C	$3.\dfrac{\pi}{2}$	Eligen el planteo en donde aparece $\frac{\pi}{2}$, tal vez relacionado con lo que recuerdan del área del triángulo, o bien lo relacionan con la fórmula dada por la mitad del diámetro.	20,3
D	$3.\pi^2$	Eligen la opción donde aparece elevado al cuadrado el valor de π en vez del radio.	17,9
Sin respuesta			5,3
Total			100

Al resolver esta actividad, los estudiantes deben recordar la fórmula para calcular el área de un círculo y aplicarla dada la medida del radio. Casi la mitad responde correctamente (43%) con la opción A, identificando y aplicando la fórmula, elevando al cuadrado la medida del radio y multiplicándola por π.

La opción C es elegida por un 20,3% de los estudiantes. En ella se plantea que el cálculo del área se realiza con la expresión $3.\frac{\pi}{2}$, posiblemente por confundir con el cálculo del área del triángulo, o bien por relacionar con el cálculo de radio a partir del perímetro. Mientras, el 17,9% de los estudiantes elige la opción D, con una fórmula similar, pero donde se eleva al cuadrado el valor de π. En menor proporción, un 13,5% elige la opción B, donde en lugar de calcular el área se calcula el perímetro del círculo.

Esta actividad corresponde al nivel 2 de desempeños, ya que involucra recordar y aplicar la fórmula del área de un círculo. En otros niveles de la progresión se encuentran actividades de aproximación y comparación de áreas y volúmenes (nivel 3) y de establecer relaciones de dependencia entre área y volumen de una figura (nivel 5). Un ejemplo del nivel 3 se presenta en la siguiente actividad.

Actividad 5 Nivel 3

La cantidad de peces que puede vivir en una pecera es proporcional a su tamaño.

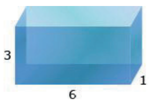
volumen aproximado: 100 dm^3

En esta pecera, Martina puso la cantidad máxima aconsejada: 11 peces pequeños.

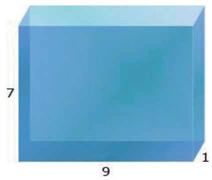
4 de esos peces crecieron al doble de su tamaño y deben sacarse de la pecera.

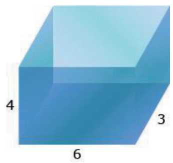
¿Cuál de las siguientes peceras tiene el volumen mínimo aconsejado para alojar esos 4 peces?

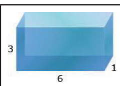
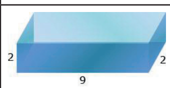
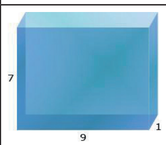
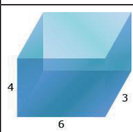
Las medidas de los lados están expresadas en dm.

A) 

B) 

C) 

D) 

Bloque temático	Medidas	
Dimensión	Comprensión	
Dominio	Resuelven situaciones que implican utilizar relaciones métricas entre elementos de una figura	
Descriptor	Toman decisiones que involucran la comparación y aproximación de volúmenes	
Opciones		Porcentaje de respuestas
A 	Calculan el volumen necesario para cada pez y lo duplican (100 / 11 x 2 = 18) y eligen la pecera que tiene 18 dm^3 de volumen (3 x 6 x 1 = 18). O bien eligen la pecera que tiene el volumen mínimo.	13,1
B 	Calculan el volumen necesario para cada pez pequeño (100 / 11 = 9), luego calculan el volumen necesario para cuatro de esos peces (9 x 4 = 36) y eligen la pecera que tiene 36 dm^3 de volumen (2 x 9 x 2 = 36).	14,0
C 	Calculan el volumen necesario para cada pez pequeño (100 / 11 = 9), luego calculan el volumen necesario para los siete peces que no deben trasladarse (7 x 9 = 63) y eligen la pecera que tiene 63 dm^3 de volumen (1 x 9 x 7 = 63).	29,8
D 	**RESPUESTA CORRECTA** Toman decisiones que involucran la comparación y aproximación de volúmenes. Calculan el volumen necesario para cada pez y lo duplican (100 / 11 x 2 = 18). Luego lo multiplican por la cantidad de peces a trasladar (18 x 4 = 72) y eligen esta pecera por ser la que tiene el volumen igual a 72 dm^3 (4 x 6 x 3 = 72).	**40,2**
Sin respuesta		2,9
Total		100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben decidir cuál de las peceras tiene el volumen mínimo para alojar a cuatro peces que crecieron al doble de su tamaño. Para esto se debe tener en cuenta que la capacidad mínima para alojar a once peces pequeños es de 100.

Cuatro de cada diez estudiantes responde correctamente (40,2%, opción D), eligiendo la pecera que tiene el volumen mínimo para alojar a los cuatro peces. Para ello, podrían calcular el volumen necesario para cada pez pequeño, duplicar este volumen y, finalmente, multiplicarlo por cuatro para obtener la respuesta. Por otro lado, casi tres de cada diez estudiantes calculan el volumen necesario para alojar a los siete peces que no se trasladan de pecera (29,8%, opción C).

Por su parte, un 14% no tiene en cuenta que los cuatro peces que se desean trasladar crecieron al doble de su tamaño y eligen la pecera que tiene la mitad del volumen necesario (opción B) para alojarlos. Por último, un porcentaje similar al anterior (13,1%) elige la opción A, donde la pecera es la de menor volumen, o bien es la que permite alojar a un solo pez que tiene el doble de su tamaño.

La actividad 5, que es de la dimensión comprensión, continúa la progresión de cálculo de áreas y profundiza sobre la comparación de volúmenes.

Las actividades presentadas en Aristas en Clase 2022 del bloque Medidas cubren las dos progresiones que se encuentran en los niveles de desempeño: una centrada en las relaciones entre propiedades de lados y ángulos de figuras planas, y la otra con foco en perímetros, áreas y volúmenes.

ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD

Este bloque, que se divide en los subbloques Estadística y Probabilidad, se centra en la organización y la representación de datos estadísticos, la interpretación de información y la comprensión del azar.

ESTADÍSTICA

En el subbloque Estadística se presentan cinco actividades que ejemplifican casi todo el rango de dificultad (niveles 1, 2, 3 y 5). Estas actividades hacen foco en extraer información de gráficos, calcular e interpretar medidas de tendencia central y de dispersión e interpretar información estadística desde la lectura de gráficos.

Para ejemplificar lo que pueden hacer los estudiantes en el subbloque Estadística, se describen algunos desempeños en cada nivel. En el nivel 1 los estudiantes pueden extraer información básica de tablas y gráficos sencillos, mientras que en el nivel 2 extraen información implícita sencilla de tablas y gráficos o relacionando ambas representaciones, así como también vinculan diferentes representaciones de datos. En el nivel 3 extraen información implícita relacionando gráficos y tablas, y realizan interpretaciones a partir de ella. También, calculan la media aritmética a partir de un listado de datos y obtienen la moda. En el nivel 4 interpretan información estadística que implica el análisis conjunto de gráficos y tablas, mientras que en el nivel 5 interpretan información estadística implicando también medidas de tendencia central. Asimismo, calculan la media aritmética a partir de un gráfico, la mediana a partir de una tabla y el rango de un conjunto de datos. También interpretan el significado de medidas de tendencia central y establecen relaciones usando sus propiedades.

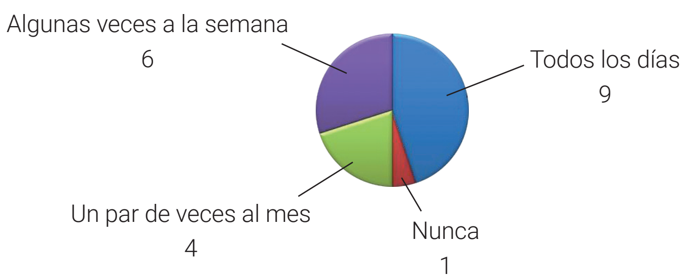
Los matices de los cinco niveles de desempeño en Estadística (tabla 2) están relacionados con el grado en que los estudiantes logran extraer, interpretar, analizar y vincular información de conjuntos de datos expresados en diversos registros.

Las actividades de este subbloque incluidas en la prueba de Aristas en Clase responden a dos progresiones, una de ellas centrada en la extracción e interpretación de información y la otra en el cálculo e interpretación de las medidas de tendencia central.

En las cinco actividades que se presentan a continuación se indica el nivel al que pertenecen y los matices que se pueden generar dentro de la progresión a la que corresponden.

Actividad 6 Nivel 1

Un día, en clase de música, a 20 estudiantes se les pregunta cuán a menudo escuchan música. Sus respuestas se representan en el siguiente gráfico.



¿Cuántos estudiantes escuchan música "Un par de veces al mes"?

A) 1
B) 4
C) 6
D) 9

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Estadística	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen información estadística explícita presentada en distintos formatos	
Descriptor		Extraen información explícita de un gráfico sencillo	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	1	Responden con la frecuencia de la categoría "nunca", o bien con el número que asocian a la frase "un par".	2,0
B	4	**RESPUESTA CORRECTA** Extraen información explícita presentada en un gráfico circular. Responden con la frecuencia de la categoría "un par de veces al mes".	**86,3**
C	6	Responden con la frecuencia de la categoría "algunas veces a la semana".	6,9
D	9	Responden con la frecuencia de la categoría "todos los días".	4,2
Sin respuesta			0,6
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben extraer información explícita de un gráfico circular sencillo. El 86,3% responde correctamente, identificando la frecuencia del valor "un par de veces al mes" (opción B), mientras que el 13,1% responde con la frecuencia de alguno de los otros tres valores de la variable (opciones A, C y D).

Esta actividad de la dimensión información corresponde a la progresión centrada en la extracción e interpretación de información. Al ser de nivel 1, involucra extraer información explícita de un gráfico.

La actividad 7 da cuenta del nivel 2 y avanza en la progresión respecto a la complejidad de los procesos que los estudiantes deben realizar: involucra extraer información implícita de un gráfico, calculando la cantidad de elementos representados.

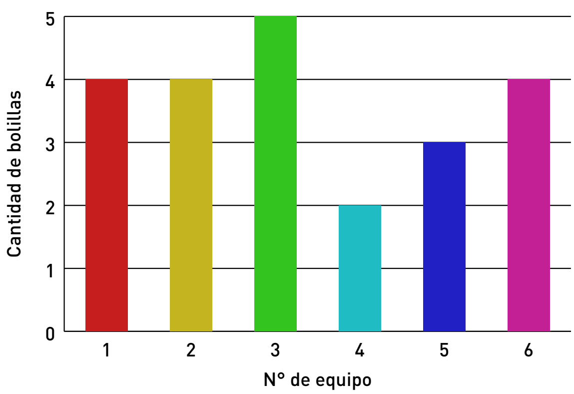
Actividad 7 Nivel 2

En el club se organizan equipos para realizar 6 tareas comunitarias. Para saber en qué equipo le toca trabajar a cada integrante, se han colocado bolillas en una urna, una por cada joven del club. En cada bolilla está escrito un número del 1 al 6, que será el número de su equipo.

Cada joven deberá extraer una bolilla y agruparse con aquellos que tengan el mismo número.

El siguiente gráfico muestra la cantidad de bolillas que hay en la urna según su numeración:

¿Cuántas bolillas hay en la urna?



A) 14

B) 15

C) 21

D) 22

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Estadística	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Procesan y organizan información estadística	
Descriptor		Calculan la cantidad de elementos de un conjunto de datos presentados en un gráfico	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	14	Responden con la suma de 4 + 5 + 2 + 3. Omiten sumar dos veces la cantidad de elementos en los casos que son iguales.	5,0
B	15	Responden con la suma de 1 + 2 + 3 + 4 + 5. Identifican que debe observar la cantidad de elementos en el eje de ordenadas, pero no lo vinculan con la altura de cada columna, por lo que suman todos los números representados en dicho eje.	13,4
C	21	Responden con la suma de 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6. Suman los valores que toma la variable, presentados en el eje de abscisas.	16,6
D	22	**RESPUESTA CORRECTA** Calculan la cantidad de elementos del conjunto de datos. Identifican la frecuencia correspondiente a cada valor de la variable y las suman correctamente. Responden con la suma de 4 + 4 + 5 + 2 + 3 + 4.	**63,2**
Sin respuesta			1,8
Total			100

En esta actividad, los estudiantes tienen que calcular la cantidad de elementos del conjunto de datos presentado en un gráfico de barras. El 63,2% de los estudiantes responden correctamente (opción D), ya que identifican las frecuencias de cada valor de la variable y las suman para obtener la cantidad de bolillas que hay en la urna.

Por otro lado, el 35% de los estudiantes responden con sumas de los valores que aparecen en los ejes (opciones B y C), o bien omiten sumar los valores de las barras que aparecen repetidas (opción A).

Siguiendo la progresión, la actividad 8 es un ejemplo de lo que pueden hacer los estudiantes en el nivel 3. En este caso, involucra la interpretación de información estadística desde una tabla.

Actividad 8 Nivel 3

La producción discográfica oficial de la banda británica The Rolling Stones desde sus inicios hasta el año 2016 inclusive, recopilada por décadas, es la que se muestra en la siguiente tabla.

Década	**Frecuencia**	**Frecuencia acumulada**
1960	21	21
1970	11	32
1980	7	39
1990	6	45
2000	4	49
2010	11	60

Fuente: Página Oficial The Rolling Stones

¿En qué década llegaron a la mitad de su producción?

Bloque temático	Estadística y probabilidad - subbloque Estadística	
Dimensión	Comprensión	
Dominio	Toman decisiones basándose en la interpretación de información estadística	
Descriptor	Interpretan información estadística desde gráficos o tablas	
Opciones	Justificación	Porcentaje de respuestas
Crédito total	**RESPUESTAS CORRECTAS** Se consideran correctas aquellas respuestas donde se reconoce que en 1970 se alcanzaron los 30 discos. Se aceptan variaciones en la forma de expresar la década. Ejemplos de respuestas correctas: - 1970. - Década del 70. - En los años 70. - Entre 1971 y 1980. - Entre 1970 y 1979. - Entre 1970 y 1980.	**25,0**
Crédito parcial	RESPUESTAS PARCIALMENTE CORRECTAS Se consideran parcialmente correctas las respuestas que dan cuenta de la interpretación de la frecuencia acumulada, pero que no responden con la década en la que ocurrió. Ejemplo de respuesta parcialmente correcta: - 32.	0,4
Sin crédito	RESPUESTAS INCORRECTAS Se consideran incorrectas cualquier respuesta que no esté contemplada en los créditos total o parcial. Ejemplos de respuestas incorrectas: - 7 discos. - 1960. - 21. - 30. - Entre 1980 y 1990. - Entre 1960 y 1975. - 1975. - 1970 y 2010. Nota aclaratoria: la respuesta 30 no lleva crédito porque solo responde con la mitad de la producción.	48,7
Sin respuesta		25,9
Total		100

En esta actividad de respuesta construida, los estudiantes deben interpretar la información estadística presentada en la tabla y responder en qué década la banda llega a la mitad de su producción discográfica. La cuarta parte responde correctamente, dando cuenta de la década en la cual se llega a la mitad de la producción (70, 1970, etc.) y algunos pocos (0,4%) contestan con la frecuencia acumulada de discos vendidos hasta la década de 1970. Por otro lado, poco menos de la mitad (48,7%) responde incorrectamente a la actividad y poco más de la cuarta parte (25,9%) la deja sin responder.

Esta actividad de la dimensión comprensión corresponde al nivel 3 de desempeños, ya que involucra la interpretación de información presentada en una tabla. Un matiz de la actividad 8, pero correspondiente al nivel 4, involucraría relacionar tablas y gráficos para extraer información. Mientras, si involucrara la interpretación de medidas de tendencia central junto con tablas y gráficos, correspondería al nivel 5.

Las actividades 9 y 10 corresponden a una progresión centrada en las medidas de tendencia central y de dispersión.

Actividad 9 Nivel 3

¿Cuál es el promedio de los siguientes números?

18 22 60 120 120

A) 60

B) 68

C) 120

D) 170

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Estadística.	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Procesan y organizan información estadística	
Descriptor		Calculan la media aritmética a partir de un listado de datos	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	60	Responden con el valor central del conjunto de datos, confunden media con mediana.	20,6
B	68	**RESPUESTA CORRECTA** Calculan la media aritmética de un conjunto de datos dado por extensión. Suman 18 + 22 + 60 + 120 + 120 = 340 y al resultado lo dividen entre la cantidad de elementos del conjunto: 340 / 5 = 68.	**38,7**
C	120	Responden con la moda del conjunto de datos.	24,7
D	170	Responden con la mitad del rango. Suman todos los datos y lo dividen entre 2. (18 + 22 + 60 + 120 + 120) / 2 = 170.	11,7
Sin respuesta			4,3
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben calcular la media aritmética de un conjunto de datos presentados en un listado. El 38,7% calcula correctamente el promedio de los cinco datos brindados (opción B).

Casi la cuarta parte de los estudiantes (24,7%) elige la opción C, que representa la moda de la distribución. Esto puede deberse a que confundan la media con la moda.

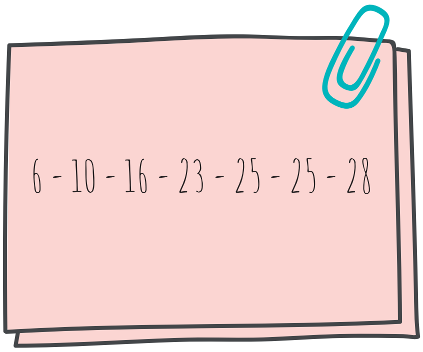
Por otra parte, los estudiantes responden con la mediana (20,6%, opción A) o con la mitad del rango (11,7%, opción D). Investigaciones sobre la interpretación de la media aritmética en estudiantes de educación secundaria abordan estos tipos de errores y muestran que muchos tienden a situarla en el centro del recorrido de la distribución, propiedad que es cierta para distribuciones simétricas (Campbell, 1974, citado en Batanero, 2001).

Esta actividad pertenece a la dimensión aplicación, que involucra el cálculo de la media aritmética, y corresponde al nivel 3 de desempeños. Otro tipo de tarea de esta progresión, también en el nivel 3, podría implicar obtener la moda de un conjunto de datos.

La actividad 10 da cuenta de la misma progresión, pero en el nivel 5 de desempeños. En ella se abordan las medidas de dispersión y los estudiantes deben calcular el rango de un listado de números.

Actividad 10 Nivel 5

¿Cuál es el rango de los siguientes datos?



A) 19
B) 22
C) 23
D) 25

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Estadística.	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Procesan y organizan información estadística	
Descriptor		Calculan el rango de un conjunto de datos	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	19	Responden con la media aritmética del conjunto de datos. Realizan: $\frac{6+10+16+23+25+25+28}{7} = 19$.	14,6
B	22	**RESPUESTA CORRECTA** Calculan el rango de un conjunto de datos ordenados. Identifican el mayor (28) y el menor (6) valor y encuentran la diferencia. Realizan 28 - 6 = 22.	**23,3**
C	23	Responden con la mediana del conjunto de datos.	20,7
D	25	Responden con la moda del conjunto de datos.	32,6
Sin respuesta			8,8
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben calcular el rango de un conjunto de datos presentados en un listado. El 23,3% calcula correctamente el rango de la distribución como la diferencia entre el mayor y el menor dato (opción B).

Un 32,6% de los estudiantes responde con el valor que es moda del conjunto de datos (opción D). Por su parte, un 20,7% confunde rango con mediana (opción C) y en menor proporción un 14,6% contesta con la media aritmética del conjunto de datos (opción A).

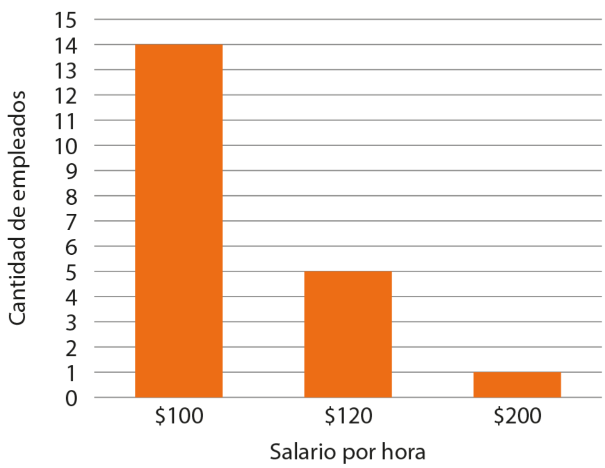
La cantidad de estudiantes que encuentran el rango de forma correcta en esta actividad (23,3%) es bastante inferior a la que lo hacen con error (67,9%). Más de la mitad de los estudiantes confunden el concepto de rango con el de media, moda o mediana. Esto podría deberse al hecho de que este concepto no haya sido trabajado al momento de la aplicación de la prueba, o bien que no se haya trabajado lo suficiente. En este sentido, los docentes de Matemática reportan que las actividades menos abordadas en tercero de media en 2022 corresponden a los subbloques Probabilidad y Estadística, lo cual también se reportó en 2018 (INEEd, 2023).

Esta actividad de la dimensión aplicación involucra el cálculo de medidas de dispersión, lo cual la ubica en el nivel 5 de desempeños.

En el mismo nivel de desempeños y progresión que las actividades 9 y 10 se encuentran actividades en las que los estudiantes deben calcular la mediana, interpretar las medidas de tendencia central y cómo varían estas al modificarse los datos. Asimismo, se incluyen desempeños como el cálculo de la media aritmética desde un gráfico, como se ejemplifica en la siguiente tarea de la edición de Aristas en Clase 2018.

Una empresa cuenta con 20 empleados que trabajan la misma cantidad de horas mensuales.

Los empleados cobran la hora de trabajo de manera diferenciada según la tarea que realizan. En el gráfico se pueden observar los distintos salarios por hora y la cantidad de empleados que cobran cada uno de esos salarios.



¿Cuánto ganan por hora en promedio los empleados de esta empresa?

A) $100
B) $110
C) $120
D) $140

Fuente: INEEd (2020b, p. 37).

PROBABILIDAD

Los descriptores de Probabilidad (tabla 2) se distribuyen entre los niveles 2 y 5 de desempeños y estos varían, dentro de una sola progresión, en función del grado en que los estudiantes logran calcular la probabilidad de sucesos o cómo la interpretan para tomar decisiones.

A continuación, se describen algunos de los desempeños del subbloque Probabilidad, como ejemplo de lo que son capaces de hacer los estudiantes en cada nivel.

En el nivel 2 los estudiantes identifican elementos básicos relativos a la probabilidad de un suceso. En el nivel 3 reconocen el grado de posibilidad de ocurrencia de un suceso y entre varios cuál tiene mayor o menor probabilidad de ocurrir. Asimismo, reconocen y exploran con situaciones aleatorias en las que los resultados posibles son equiprobables y determinan la fracción que representa la probabilidad de un suceso, a partir de su frecuencia de ocurrencia o a partir del cociente entre el número de casos favorables y el total de casos posibles (ley de Laplace). En el nivel 4 obtienen la probabilidad de un suceso, mientras que en el nivel 5 toman decisiones utilizando estas probabilidades, al tiempo que argumentan sobre ellas usando sus propiedades básicas.

Las cuatro actividades de Probabilidad incluidas en la prueba de Aristas en Clase dan cuenta de descriptores de los niveles 2, 3 y 5. Estas actividades se focalizan en reconocer el grado de posibilidad de ocurrencia de un suceso, expresar numéricamente una probabilidad dada en lenguaje natural, obtener la probabilidad de un suceso y argumentar sobre la probabilidad de un suceso usando sus propiedades básicas.

Actividad 11 Nivel 2

Clara y Pablo tiran un dado para saber cuál de ellos elige la serie de TV que van a mirar.
Si sale un número par elige Clara, de lo contrario elige Pablo.

¿En cuál de los siguientes conjuntos están todos los números que le permiten elegir la serie de TV a Pablo?

A) {2, 4, 6}
B) {1, 2, 3, 4, 5, 6}
C) {1, 3, 5}
D) {1, 3, 5, 7, 9, 11}

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Probabilidad	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen fenómenos aleatorios y diferentes tipos de sucesos	
Descriptor		Relacionan sucesos definidos por comprensión y extensión	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	{2, 4, 6}	Eligen la opción que contiene el suceso favorable para Clara.	11,5
B	{1, 2, 3, 4, 5, 6}	Eligen la opción que contiene el espacio muestral que surge de tirar el dado.	10,6
C	{1, 3, 5}	**RESPUESTA CORRECTA** Dado un suceso por comprensión, lo reconocen por extensión. Reconocen que el suceso obtener un número impar al tirar el dado se representa por el conjunto {1, 3, 5}.	**44,1**
D	{1, 3, 5, 7, 9, 11}	Eligen la opción que tiene un suceso donde el conjunto está formado por seis elementos impares.	32,8
Sin respuesta			1,0
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben expresar por extensión el suceso “obtener un número impar al lanzar un dado”. Un 44,1% la resuelve correctamente (opción C).

Por otro lado, aproximadamente un tercio de los estudiantes (32,8%) elige un conjunto que contiene números impares (opción D), aunque algunos de ellos no se pueden obtener al lanzar un dado convencional. Esto puede indicar que no reconocen el espacio muestral relacionado con el experimento.

Poco más de la décima parte (10,6%) elige como respuesta el espacio muestral que se obtiene de lanzar un dado (sin considerar los casos favorables en el experimento) y una proporción similar de estudiantes (11,5%) elige al conjunto que contiene a los elementos del suceso “obtener un número par al lanzar el dado”, opciones B y A, respectivamente. Estos estudiantes confunden los casos favorables con los no favorables, o bien los números pares con los impares. También pueden responder con el suceso que se da explícito en el enunciado.

La actividad 11, de la dimensión información, da cuenta del nivel 2 de desempeños, ya que requiere que los estudiantes relacionen sucesos definidos por comprensión y extensión. Otro desempeño de este nivel, de la misma dimensión, involucra reconocer el grado de probabilidad de un suceso.

Por su parte, un matiz del nivel 3 implica el reconocimiento del suceso con mayor o menor probabilidad de ocurrir. Un ejemplo de esta última habilidad se encuentra en la siguiente tarea de Aristas en Clase 2018.

Cuatro amigos juegan con un mazo de 48 cartas españolas.

El mazo está compuesto por 12 cartas de cada palo: bastos, copas, espadas y oros, las que están numeradas del 1 al 12.

Extraen una carta del mazo, al azar.

-Si la carta extraída es de oro, gana Agustín.

-Si es un número impar, gana Bauti.

-Si es un número menor que 6, gana Guille.

-Si es una figura (10, 11 o 12), gana Nacho.

¿Cuál de ellos tiene más probabilidad de ganar?

A) Agustín.
B) Bauti.
C) Guille.
D) Nacho.

Fuente: INEEd (2020b, p. 40).

La actividad 12 avanza en los procesos cognitivos involucrados y corresponde a la dimensión aplicación.

Actividad 12 Nivel 2

Un jugador de básquet emboca dos de cada cinco tiros.

¿Qué probabilidad hay de que emboque un tiro?

A) $\frac{1}{5}$ B) 1,5 C) $\frac{2}{5}$ D) 2,5

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Probabilidad.	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Asignan probabilidades a sucesos	
Descriptor		Dada la probabilidad de un suceso en lenguaje natural, la expresan numéricamente	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	1/5	Eligen la opción donde se muestra el cociente entre 1 y 5. Consideran al 1 como la cantidad de casos favorables, relacionándolo con el enunciado "un tiro" y a "cinco tiros" como los casos posibles.	11,2
B	1,5	Eligen la opción donde la probabilidad es el número decimal 1,5, asociando el 1 con el enunciado "un tiro" y al cinco con "cinco tiros".	15,2
C	2/5	**RESPUESTA CORRECTA** Expresan numéricamente una probabilidad dada en lenguaje natural. Responden con el cociente entre 2 y 5, relacionándolo con el enunciado "dos de cada cinco".	**58,1**
D	2,5	Eligen la opción donde la probabilidad es el número decimal 2,5, asociándolo con el enunciado "dos de cada cinco".	14,6
Sin respuesta			0,9
Total			100

Los estudiantes que resuelven esta actividad deben expresar numéricamente una probabilidad dada en lenguaje natural. Casi seis de cada diez la resuelven correctamente (opción C), respondiendo con el cociente entre 2 y 5 por vincularlo con la expresión "dos de cada cinco".

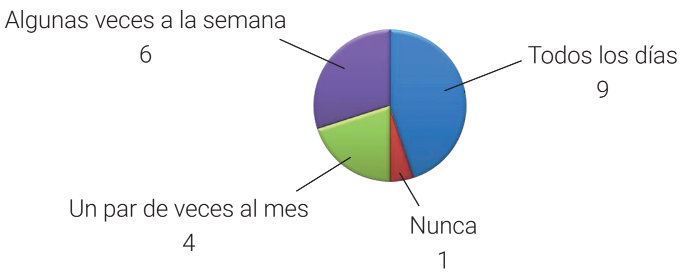
Por otro lado, un 15,2% de los estudiantes elige la opción en donde la probabilidad dada en lenguaje natural se traduce como el número decimal 1,5 (opción B). En este caso, posiblemente interpretan que la probabilidad debe expresarse como número decimal y utilizan las dos cifras dadas en el enunciado. En un porcentaje similar al anterior (14,6%) los estudiantes eligen la respuesta 2,5 (opción D), interpretando la expresión que da lugar a la probabilidad "dos de cada cinco". En este caso, no interpretan que la elección expresa la probabilidad del suceso como un número decimal mayor que 1.

Por su parte, un 11,2% de los estudiantes elige la respuesta donde se traduce a la probabilidad como el número 1/5 (opción A). Posiblemente, quienes eligen esta respuesta consideren que al preguntar por la probabilidad de acertar un tiro se tiene solo un caso favorable.

Un matiz de este desempeño en la misma progresión, pero en el nivel 3, podría ser obtener la probabilidad de un suceso, como se ejemplifica en la actividad 13.

Actividad 13 Nivel 3

Un día, en clase de música, a 20 estudiantes se les pregunta cuán a menudo escuchan música. Sus respuestas se representan en el siguiente gráfico.



Si elegimos uno de esos jóvenes al azar, ¿qué probabilidad hay de que escuche música "Todos los días" o "Algunas veces a la semana"?

A) $\frac{15}{20}$ B) $\frac{9}{20}$ C) $\frac{2}{4}$ D) $\frac{1}{4}$

Bloque temático		Estadística y probabilidad - subbloque Probabilidad.	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Asignan probabilidades a sucesos	
Descriptor		Obtienen la fracción que representa la probabilidad de un suceso, a partir de su frecuencia de ocurrencia	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	15/20	**RESPUESTA CORRECTA** Obtienen la probabilidad de un suceso a partir de su frecuencia de ocurrencia extraída de un gráfico. Calculan el número de casos favorables (6 + 9), el número de casos posibles (20) y responden con el cociente (15 / 20).	**39,9**
B	9/20	Responden con el cociente entre el número de casos favorables correspondiente al suceso “todos los días” (9) y el número de casos posibles (20).	35,8
C	2/4	Responden con el cociente entre 2 y 4. Consideran los dos sucesos que aparecen en la pregunta para los casos favorables y las cuatro categorías como los casos posibles.	14,1
D	1/4	Responden con el cociente entre 1 y 4. Consideran solo uno de los sucesos que aparecen en la pregunta como el número de casos favorables y las cuatro categorías como los casos posibles.	8,0
Sin respuesta			2,2
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben obtener la fracción que representa la probabilidad de la unión de dos sucesos (“todos los días” o “algunas veces a la semana”) a partir de su frecuencia de ocurrencia.

Casi el 40% de los estudiantes la resuelve correctamente (opción A); primero identificando la cantidad de casos favorables y luego obteniendo la probabilidad como el número de casos favorables sobre el número de casos posibles. Por otro lado, aproximadamente un tercio de los estudiantes (35,8%) solo considera los casos favorables al suceso “todos los días” sobre el número de casos posibles (opción B). Es posible que estos estudiantes elijan el suceso que tiene mayor frecuencia.

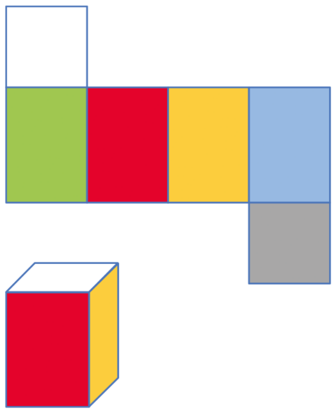
Por su parte, un 14,1% elige la opción donde se plantea que son dos casos favorables entre cuatro posibles (opción C), por considerar que en el gráfico son favorables dos de los cuatro sectores disponibles. Posiblemente, estos estudiantes identifican la cantidad de sucesos involucrados en la situación (2) como el numerador y las cuatro respuestas posibles como el denominador.

En menor proporción, un 8% de los estudiantes responden con la fracción ¼ (opción D). En este caso, al igual que quienes eligen la opción C, consideran cuatro casos posibles, pero solo un caso favorable por elegir uno de los dos sucesos de la pregunta.

Esta actividad de la dimensión aplicación corresponde al nivel 3 de desempeños, ya que involucra la obtención de la probabilidad de un suceso, expresada como una fracción. Si, en cambio, la probabilidad se diera expresada como un número decimal, la actividad daría cuenta del nivel 4. Esta diferencia se basa en los procesos que aplica el estudiante para resolver la actividad. Mientras que en el nivel 3, al preguntar por la probabilidad del suceso, las opciones son fracciones cuyo numerador y denominador se relacionan directamente con los casos favorables y posibles del suceso, en el nivel 4 el estudiante debe determinar la fracción (sin pistas de cuáles podrían ser sus partes) y luego realizar la división que permite obtener la probabilidad expresada como un decimal entre 0 y 1 (INEEd, 2020b).

Un ejemplo de esto se puede ver en la siguiente actividad de Aristas en Clase 2018.

Florencia construye un dado con este desarrollo plano:



Cuando tira este dado muchas veces, Florencia se da cuenta de que algunas caras salen más seguido que otras.

Cara	Frecuencia
Blanca	27
Verde	63
Roja	54
Amarilla	65
Azul	59
Gris	32

Para calcular qué probabilidad de salir tiene cada una de las caras, a Florencia se le ocurrió tirar el dado 300 veces y anotar su frecuencia.

A partir de estos datos, ¿cuál es la probabilidad de que salga la cara blanca?

A) 0,09
B) 0,2
C) 0,27
D) 0,3

Fuente: INEEd (2020b, p. 43).

En esta misma progresión, pero en el nivel 5 de desempeños, se encuentran las actividades en las que los estudiantes deben tomar decisiones o argumentar utilizando probabilidades o propiedades de la probabilidad. Un ejemplo de esto lo constituye la actividad 14.

Actividad 14 Nivel 5

Estas son las instrucciones de un juego de dados regulares.

1. Juegan 2 participantes.
2. Cada jugador debe elegir una tarjeta con un número.
3. Se tiran 2 dados a la vez y se suman los puntajes obtenidos.
4. Gana quien eligió la tarjeta con el número que coincide con esa suma.
5. En caso de empate o que nadie gane, se vuelve a tirar.

Las tarjetas disponibles para elegir, en esta oportunidad, son:

2 **7** **12**

¿Qué tarjeta se debería elegir para tener mayor probabilidad de ganar?

A) El 2, porque el dado tiene números de 1 a 6.

B) El 7, porque se forma de varias maneras y los otros no.

C) El 12, porque es el mayor número que se puede formar.

D) Cualquiera, porque todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.

Bloque temático		Estadística y probabilidad - Subbloque Probabilidad.	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Toman decisiones basándose en la interpretación de la probabilidad de un suceso y sus propiedades	
Descriptor		Toman decisiones utilizando la probabilidad de sucesos	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	El 2, porque el dado tiene números de 1 a 6.	Consideran los valores posibles en la tirada de un solo dado y responden con el único valor entre 1 y 6.	10,4
B	El 7, porque se forma de varias maneras y los otros no.	**RESPUESTA CORRECTA** Toman decisiones utilizando la probabilidad de un suceso. Comparan los casos favorables de cada suceso y obtienen que el 7 tiene más posibilidades de formarse que el 2 y el 12 (1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1). O bien comparan las probabilidades para elegir la tarjeta que tiene mayor chance de ganar.	**27,1**
C	El 12, porque es el mayor número que se puede formar.	Consideran que el 12 tiene mayor probabilidad de ganar por ser el mayor valor.	14,6
D	Cualquiera, porque todas las caras tienen la misma probabilidad de salir.	Consideran que cualquiera de las tarjetas tiene la misma probabilidad de salir. No tienen en cuenta que la cantidad de combinaciones posibles para cada suma es distinta.	47,1
Sin respuesta			0,8
Total			100

Los estudiantes que resuelven esta actividad deben decidir cuál es la tarjeta que tiene mayor probabilidad de ganar, considerando que los números presentes en ellas se corresponden con la suma de puntos que se obtienen al tirar dos dados convencionales.

Un 27,1% responde correctamente y elige la respuesta en la que se señala que la tarjeta que contiene al 7 es la que tiene mayor probabilidad de ganar (opción B). Posiblemente, estos estudiantes calculan la probabilidad de ganar con cada tarjeta y observan que la del 7 es mayor, considerando que tiene más casos favorables.

Por otra parte, casi la mitad de los estudiantes (47,1%) eligen la respuesta que expresa que todas las tarjetas tienen la misma probabilidad de salir (opción D). Estos estudiantes no tienen en cuenta que, al lanzar dos dados, hay sumas que se obtienen de una sola manera, como la de 2 y 12, a diferencia de otras que se obtienen con mayor probabilidad. Esta elección también puede deberse a la idea de que el lanzamiento de un solo dado, en general, se vincula con una experiencia aleatoria donde los sucesos elementales son equiprobables.

En menor proporción los estudiantes eligen el resto de las opciones, donde responden con el 2, posiblemente porque es el único valor que aparece en las caras del dado (opción A, 10,4%), o con el 12, por ser el mayor valor y confundir con mayor probabilidad (opción C, 14,6%).

Esta actividad es de la dimensión comprensión y da cuenta del nivel 5 de desempeños, ya que involucra la toma de decisiones utilizando la probabilidad de sucesos. Otro desempeño en el mismo nivel implica que los estudiantes argumenten sobre la probabilidad de un suceso utilizando las propiedades básicas. Por ejemplo, justificar por qué la probabilidad de un suceso es un número entre 0 y 1, o bien justificar por qué un suceso es más o menos probable que otro.

Las nueve actividades correspondientes al bloque Estadística y probabilidad que se incluyen en esta versión de Aristas en Clase ejemplifican las progresiones de los niveles de desempeño y algunos matices entre los procedimientos involucrados. En ellas se centra la atención en la interpretación de información extraída de tablas y gráficos, así como en el análisis de medidas de tendencia central y de dispersión y en los distintos grados en los que los estudiantes logran obtener la probabilidad de un suceso.

GEOMETRÍA

El bloque Geometría se centra en las relaciones intra e interfigurales que no priorizan el cálculo de medidas[7]. Las actividades se focalizan en el reconocimiento de los elementos y de las propiedades de las figuras geométricas (planas y espaciales) y de algunas transformaciones isométricas del plano (traslación, simetría axial y simetría central), así como en su aplicación. Para resolver las situaciones que se presentan en este bloque, los estudiantes deben recurrir a elementos y propiedades de las figuras geométricas y de las funciones del plano en el plano.

Los descriptores de las habilidades respecto al bloque Geometría (tabla 2) se distribuyen en los cinco niveles de desempeños.

En el nivel 1 los estudiantes reconocen las posiciones relativas de dos rectas en el plano e identifican elementos básicos en prismas, mientras que en el nivel 2 reconocen elementos de las figuras planas y relacionan diferentes representaciones de figuras del espacio. Respecto a simetrías, identifican centro o ejes y situaciones que involucran la simetría axial. En el nivel 3 los estudiantes relacionan figuras geométricas sencillas con su programa de construcción. Además, identifican propiedades del centro o del eje de simetría de una figura plana, aplican propiedades de las simetrías para resolver situaciones sencillas y relacionan una figura plana con su imagen a través de una simetría axial o central. En el nivel 4 los estudiantes reconocen líneas y puntos notables en triángulos y describen figuras planas usando sus propiedades. Además, interpretan propiedades de triángulos y rectángulos a partir de relaciones entre sus elementos y resuelven situaciones que implican la interpretación de propiedades de prismas y pirámides respecto a sus caras. En las isometrías, relacionan una figura plana con su imagen a través de una traslación. En el nivel 5 los estudiantes reconocen triángulos semejantes y resuelven situaciones apelando a las propiedades de líneas y puntos notables de triángulos. También, interpretan propiedades de figuras del plano y del espacio y elaboran argumentos usando propiedades de las isometrías.

Los matices entre los niveles están relacionados con el grado en que los estudiantes logran reconocer figuras, sus propiedades y relaciones, así como describirlas y clasificarlas. Los desempeños también varían según si logran reconocer y aplicar isometrías en figuras planas y validar argumentos usando sus propiedades.

Los niveles de desempeño del bloque Geometría se estructuran en tres progresiones. Una de ellas se centra en el reconocimiento de posiciones relativas entre rectas, figuras geométricas y sus elementos y las líneas y puntos notables en triángulos; otra se enfoca en la descripción e interpretación de las características y propiedades de las figuras y la tercera progresión hace énfasis en las isometrías y sus relaciones.

Las cinco actividades presentes en Aristas en Clase ejemplifican las tres progresiones.

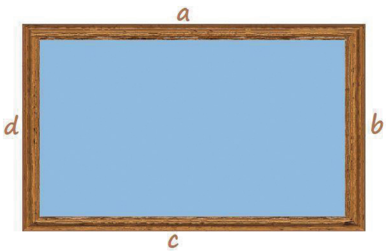
[7] Las relaciones figurales que priorizan el cálculo de medidas de lados y ángulos se abordan en el bloque Medidas.

Actividad 15 Nivel 1

Emilio construye su casa y las ventanas que colocará son rectangulares.

Pondrá marcos con varillas de madera como muestra la figura.

¿Cuáles de las siguientes varillas son paralelas entre sí?



A) b y c

B) a y b

C) b y d

D) a y d

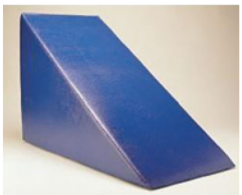
Bloque temático		Geometría.	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen figuras, sus elementos y distintas representaciones	
Descriptor		Reconocen posiciones relativas entre rectas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	b y c	Eligen la opción que contiene dos varillas perpendiculares, la derecha y la inferior.	6,5
B	a y b	Eligen la opción que contiene dos varillas perpendiculares, la derecha y la superior.	8,1
C	b y d	**RESPUESTA CORRECTA** Reconocen posiciones relativas entre rectas. Identifican que los lados b y d están contenidos en rectas paralelas por ser lados de un rectángulo.	**80,8**
D	a y d	Eligen la opción que contiene dos varillas perpendiculares, la izquierda y la superior.	3,8
Sin respuesta			0,8
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben reconocer rectas paralelas en un rectángulo. Más del 80% elige correctamente la opción C, respondiendo que las varillas b y d son paralelas. Casi un quinto responde con pares de lados perpendiculares (18,4%, opciones A, B y D), tal vez confundiendo las relaciones de perpendicularidad y paralelismo.

Esta actividad de la dimensión información da cuenta del nivel 1 de desempeños e involucra el reconocimiento de posiciones relativas entre rectas del plano, habilidad que se trabaja desde la educación primaria. En particular, el reconocimiento de rectas paralelas aparece en el programa escolar desde segundo grado y se desarrolla en actividades de geometría a lo largo de toda la escolaridad, además de ser un concepto ampliamente utilizado en la vida cotidiana.

Otros desempeños de esta progresión sobre el reconocimiento de figuras geométricas y sus elementos abordan la identificación de figuras espaciales sencillas en posición convencional, tales como el cono y la cantidad de caras de un prisma, ambos desempeños del nivel 1. Estos contenidos también son trabajados a lo largo de la trayectoria escolar de los estudiantes. Un ejemplo de esto se incluye en Aristas en Clase 2018.

En la imagen se muestra un prisma de base triangular.



¿Cuántas caras tiene este prisma?

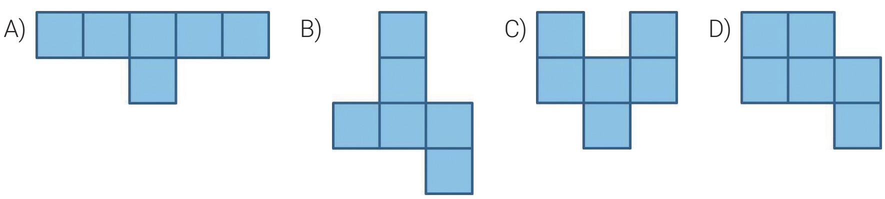
A) 2
B) 3
C) 4
D) 5

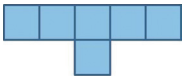
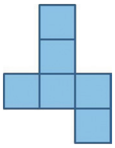
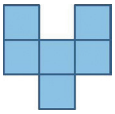
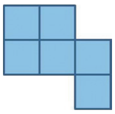
Fuente: INEEd (2020b, p. 46).

En el nivel 2 las actividades de esta progresión involucran el reconocimiento de dos representaciones de una figura del espacio, tales como su nombre y su desarrollo plano, como se presenta en la actividad 16.

Actividad 16 Nivel 2

¿Cuál de los siguientes desarrollos planos corresponde a un cubo?



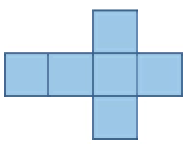
Bloque temático		Geometría	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen figuras, sus elementos y distintas representaciones	
Descriptor		Relacionan dos representaciones de una figura del espacio (nombre y desarrollo plano)	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A		Eligen un desarrollo plano donde se superponen dos caras. Tal vez lo hacen por ser el más similar al desarrollo tradicional del cubo.	13,4
B		**RESPUESTA CORRECTA** Identifican un desarrollo plano de un cubo. Pliegan el desarrollo de forma imaginaria hasta completar el cubo, observan que no se superponen las caras.	**53,8**
C		Eligen un desarrollo plano donde se superponen dos caras, pueden suponer que los dos cuadrados que se observan en la parte superior del desarrollo se corresponden con las bases.	14,9
D		Eligen un desarrollo plano donde se superponen dos caras, pueden elegirlo por ser el que tiene cuatro cuadrados formando un cuadrado mayor.	17,0
Sin respuesta			0,9
Total			100

Al resolver esta actividad los estudiantes deben relacionar dos representaciones de un cubo: su nombre con un desarrollo plano. Poco más de la mitad responde correctamente (opción B, 53,8%), identificando un desarrollo plano del cubo, entre otros que no lo son.

Por otra parte, el 45,3% de los estudiantes elige, en similares proporciones, desarrollos que al armarlos no forman un cubo por solapar sus caras (opciones A, C y D). En particular, la opción A es elegida por un 13,4% de los estudiantes, probablemente porque se asemeja mucho al desarrollo tradicional del cubo. Luego, un 14,9% de los estudiantes elige la opción C, posiblemente por observar que este desarrollo tiene dos cuadrados en la parte superior que podrían interpretarse como las bases del cubo. Y la opción D es elegida por un 17% de los estudiantes, posiblemente porque es la única que tiene cuatro cuadrados formando otro cuadrado más grande.

Los diagramas presentados en las opciones de esta actividad (excepto en la opción A) no son los desarrollos planos convencionalmente trabajados en las aulas. Por esto, la asociación que deben realizar los estudiantes entre el desarrollo propuesto y el cubo implica pensar en el proceso de plegado o en las características para su formación en el espacio.

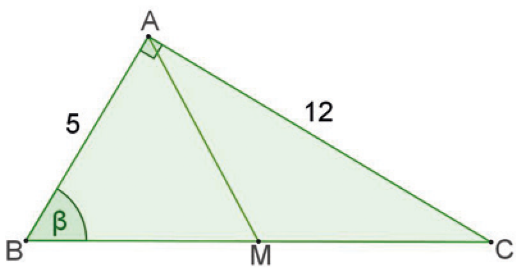
Generalmente, el simple cambio de orientación de una figura puede ser un obstáculo para su reconocimiento (Duval, 1995). En consecuencia, es probable que si a los estudiantes se les presentara una tarea en la que la opción correcta fuera el desarrollo plano del cubo más conocido, la actividad resultaría más sencilla:



La geometría planteada de forma estática con abuso de representaciones estereotipadas provoca en los estudiantes concepciones muy limitadas (Rodríguez Rava, 2015). Si bien la visualización de figuras geométricas en estas representaciones implica que la resolución de este tipo de actividades sea más sencilla, a la hora de trabajar en el aula resulta relevante acompañar las actividades geométricas con material concreto o *software* dinámico, que permita al estudiante familiarizarse con distintas vistas, posiciones, de una misma figura, a fin de que comprenda más globalmente sus características.

Mientras que en esta actividad del nivel 2 los estudiantes deben relacionar dos representaciones de una figura del espacio, en el nivel 4 en la misma progresión deben reconocer puntos y líneas notables. Un ejemplo de esto se presenta en la siguiente tarea, incluida en Aristas en Clase 2018.

Del siguiente triángulo se sabe que es rectángulo en A.



Sabiendo que M es punto medio del lado BC, ¿qué representa el segmento AM en el triángulo?

A) Una mediana.
B) Una altura.
C) Una mediatriz.
D) Una bisectriz.

Fuente: INEEd (2020b, p. 47).

Por su parte, en el nivel 5 se ubican tareas que involucran resolver situaciones geométricas apelando a las propiedades de líneas y puntos notables y aquellas donde se deben reconocer semejanzas en triángulos.

Las actividades 17 y 18 ejemplifican la progresión centrada en la descripción de las características y propiedades de las figuras planas y espaciales.

Actividad 17 Nivel 3

Micaela faltó a clase de matemática y Gabriel le pasó el siguiente procedimiento para trazar una figura geométrica, que deben llevar construida para la próxima clase.

Paso 1.- Trazar un segmento AB.

Paso 2.- Trazar la circunferencia de centro A y radio $\overline{AB}$.

Paso 3.- Trazar la circunferencia de centro B y radio $\overline{AB}$.

Paso 4.- Determinar los puntos de corte de ambas circunferencias y llamarlos C y D.

Paso 5.- Trazar la recta CD.

¿Qué figura geométrica debería quedarle determinada a Micaela en el Paso 5, si lo hace correctamente?

A) La bisectriz del ángulo CAD.

B) La bisectriz del ángulo DCB.

C) La mediatriz del segmento CD.

D) La mediatriz del segmento AB.

Bloque temático		Geometría	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Establecen relaciones entre figuras usando propiedades de las figuras o de las transformaciones	
Descriptor		Relacionan la mediatriz de un segmento con un respectivo programa de construcción	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	La bisectriz del ángulo CAD.	Realizan el procedimiento y visualizan que el segmento AB, está contenido en la bisectriz del ángulo CAD.	10,5
B	La bisectriz del ángulo DCB.	Identifican los puntos D y C de la recta del paso 5 y eligen la opción donde se indica el trazado de la bisectriz del ángulo DCB, que tiene a la recta DC como un lado.	15,7
C	La mediatriz del segmento CD.	Realizan el procedimiento y visualizan que el segmento AB está contenido en la mediatriz del segmento CD.	35,3
D	La mediatriz del segmento AB.	**RESPUESTA CORRECTA** Reconocen el procedimiento de trazado de la mediatriz del segmento AB, o bien realizan el procedimiento e identifican que la recta trazada en el paso 5 es la mediatriz de AB.	**31,7**
Sin respuesta			6,8
Total			100

Los estudiantes que resuelven esta actividad reconocen un procedimiento de construcción de la mediatriz de un segmento. Los que responden correctamente (opción D, 31,7%) son capaces de reconocer los pasos para un posible trazado de la mediatriz de un segmento, o bien realizar un bosquejo paso a paso y obtener la figura.

En una proporción similar (opción C, 35,3%) los estudiantes responden con un procedimiento que también obtiene una mediatriz, pero del segmento CD. Estos adolescentes pueden haber realizado un bosquejo gráfico y visualizar la relación entre el segmento y su mediatriz de forma inversa. Por otro lado, el 26,2% de los estudiantes responde con la bisectriz de un ángulo incluido en el procedimiento (opciones A, 10,5%, y B, 15,7%).

Otro desempeño de esta misma progresión y en el mismo nivel involucra el relacionamiento de un programa de construcción con un paralelogramo. Un ejemplo de esto se puede encontrar en la siguiente actividad de Aristas en Clase 2018.

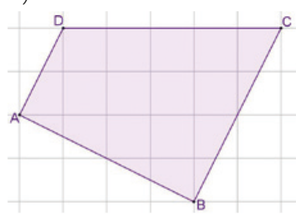
Danilo tenía que construir una figura, siguiendo este procedimiento:

- Representa tres puntos no alineados: A, B y D.
- Traza los segmentos (AB) y (AD).
- Traza una recta paralela a AB que pase por D.
- Traza una recta paralela a AD que pase por B.
- La intersección de las rectas trazadas anteriormente es el punto C.
- Traza la figura ABCD.

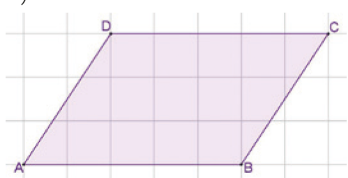
Danilo realizó la construcción correctamente.
¿Cuál de las siguientes figuras podría haber construido?

A)

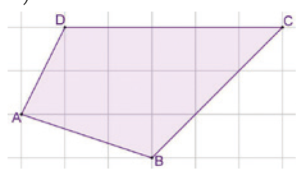
B)



C)



D)

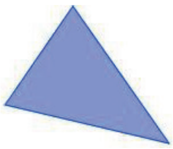


Fuente: INEEd (2020b, p. 52).

En el nivel 4 de esta progresión se incluyen actividades que involucran describir figuras planas y espaciales usando sus propiedades y resolver situaciones que implican interpretar propiedades de prismas y pirámides, vinculadas a la forma o cantidad de caras. Un ejemplo de este último descriptor se muestra en la actividad 18.

Actividad 18 Nivel 4

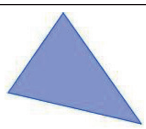
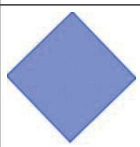
¿Cuál de las siguientes figuras utilizó Julia para construir la base de su prisma?

A) 

B) 

C) 

D) 

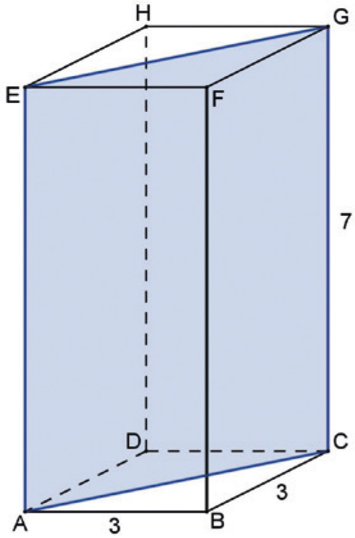
Bloque temático		Geometría	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Resuelven problemas geométricos basándose en las propiedades de las figuras o de las transformaciones	
Descriptor		Resuelven situaciones que implican la interpretación de propiedades de prismas vinculadas a la forma y cantidad de sus caras	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A		**RESPUESTA CORRECTA** Resuelven situaciones aplicando la relación entre el número total de caras de un prisma y la cantidad de lados del polígono base. Identifican que la cantidad de caras del prisma es dos unidades mayor que la cantidad de lados de la base, por ende, la base de un prisma de cinco caras debe ser un triángulo.	**17,0**
B		Seleccionan la figura cuadrado, tal vez confundiendo prisma con pirámide.	11,0
C		Seleccionan la figura que puede corresponder a las caras laterales de un prisma recto.	8,1
D		Seleccionan la figura que tiene cinco lados, asociando lados con cantidad de caras.	63,5
Sin respuesta			0,4
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben reconocer las características de un prisma de base triangular. Los que responden correctamente (opción A, 17%) identifican la relación entre la cantidad de caras total y la cantidad de lados de la base, por ejemplo, restando las dos bases a la cantidad de caras (cinco) para obtener el número de lados de la base (tres) y responder con el triángulo.

Casi dos de cada tres estudiantes responden con la opción D (63,5%), que presenta un pentágono. Estos estudiantes confunden la cantidad total de caras del prisma con la cantidad de lados de la base. En menor proporción, un 11% elige la opción B, que presenta un cuadrado. Estos estudiantes pueden haber pensado en una pirámide de base cuadrada, que también tiene cinco caras, o bien en un prisma sin contar una de sus caras. De forma similar, un 8,1% elige la opción C, con un rectángulo. Ellos tal vez eligen esta opción por ser la única similar a una cara "estándar" de un prisma, o bien por ser la base de una pirámide de cinco caras.

En esta actividad los estudiantes deben resolver una situación que implican interpretar propiedades de prismas, en relación con la forma y cantidad de caras. En esta misma progresión, pero en el nivel 5, se encuentran actividades que involucran el reconocimiento de secciones planas. La siguiente tarea es un ejemplo de dicho desempeño y se encuentra en Aristas en Clase 2018.

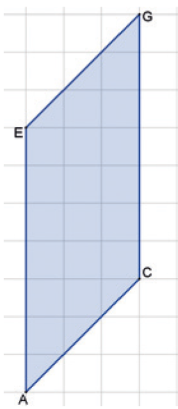
La figura (ABCDEFGH) representa un prisma recto de base cuadrada.



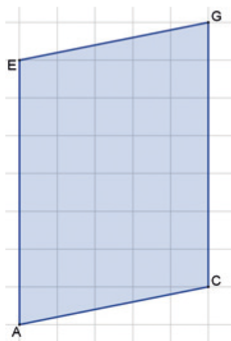
Este ha sido cortado como lo muestra el dibujo, determinando el cuadrilátero ACGE.

¿Qué figura se obtuvo al realizar el corte?

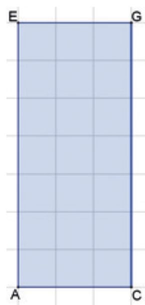
A)



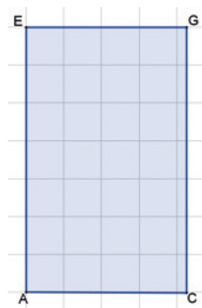
B)



C)



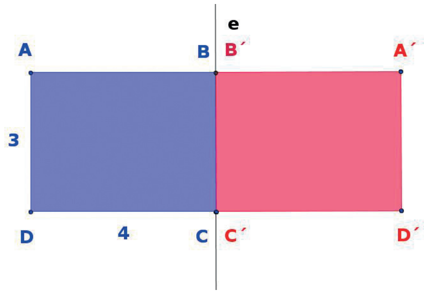
D)



Fuente: INEEd (2020b, p. 55).

La tercera progresión del bloque geometría está centrada en las isometrías. Un ejemplo de esto lo constituye la actividad 19.

Actividad 19 Nivel 3



Los rectángulos A B C D y A´B´C´D´ son simétricos con respecto a la recta e.

¿Cuál es el perímetro del rectángulo A A´D´D?

A) 12

B) 14

C) 22

D) 28

Bloque temático		Geometría	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Resuelven problemas geométricos basándose en las propiedades de las figuras o de las transformaciones	
Descriptor		Aplican propiedades de las simetrías para resolver situaciones sencillas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	12	Responden con el área de uno de los rectángulos dados.	21,4
B	14	Responden con el perímetro de uno de los rectángulos dados y no el solicitado, o bien suman las dimensiones dadas y multiplica por dos.	23,4
C	22	**RESPUESTA CORRECTA** Aplican la propiedad de la simetría axial que implica congruencia de lados. Reconocen que los rectángulos ABCD y A´B´C´D´ son congruentes y, por lo tanto, las dimensiones del AA´D´D son ocho y tres. Responden que el perímetro es 22.	**42,5**
D	28	Reconocen que los rectángulos ABCD y A´B´C´D´ son congruentes, pero responden con el doble del perímetro de uno de ellos. Omiten restar la medida de los segmentos internos.	7,9
Sin respuesta			4,8
Total			100

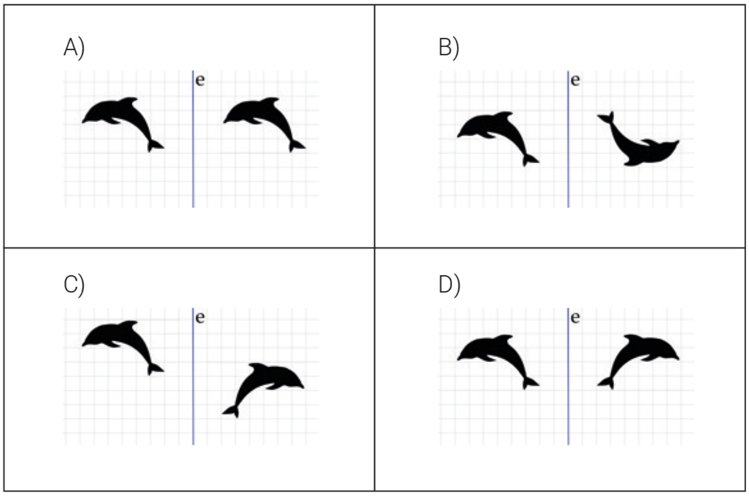
Para resolver esta actividad, los estudiantes deben aplicar las propiedades de la simetría axial relacionadas con las medidas de los segmentos correspondientes en la simetría. El 42,5% responde correctamente (opción C), identificando que, como los rectángulos ABCD y A´B´C´D´ son congruentes por ser simétricos, los segmentos B'A', A'D' y D'C' tienen la misma medida que sus correspondientes BA, AD y DC. Por lo tanto, que el perímetro del rectángulo AA'D'D es (4 + 4 + 3) x 2 = 22.

Casi en la misma proporción, los estudiantes eligen las opciones A o B (21,4% y 23,4%, respectivamente), donde responden con el área (opción A) o perímetro (opción B) del rectángulo ABCD, sin considerar la simetría axial planteada y, por lo tanto, sin considerar la figura resultante en la simetría.

Por último, un 7,9% de los estudiantes elige la opción D, donde se aplica la propiedad de la simetría axial que implica congruencia de lados, pero responde con la suma de los perímetros de los rectángulos simétricos, omitiendo restar la medida de los segmentos internos.

Dentro de la misma progresión que la actividad 19, en el nivel previo (nivel 2) se encuentran actividades que involucran reconocer el centro o los ejes de simetría en figuras planas o identificar situaciones de simetría axial. Un ejemplo de esto se presentó en la edición 2018 de Aristas en Clase y se muestra a continuación.

¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde a una simetría axial que tiene como eje la recta azul (e)?

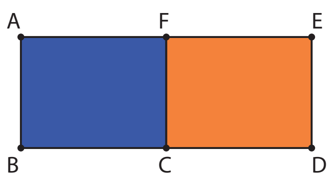


Fuente: INEEd (2020b, p. 49).

Por su parte, en el nivel 3 de esta progresión centrada en las isometrías, además de lo comentado para la actividad 19, se encuentran actividades de reconocimiento de propiedades del centro o del eje de simetría de una figura plana, además de las de relacionamiento de figuras planas con su imagen en simetría axial o central.

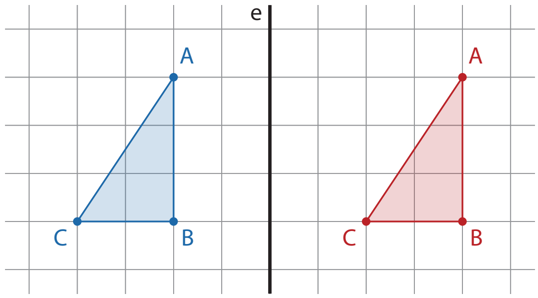
Una variante de la actividad 19 que ejemplifique el desempeño mencionado podría ser la siguiente, donde se pregunte por el eje de simetría.

¿Cuál es el eje de simetría que transforma el rectángulo AFCB en el FEDC?



Luego, en el nivel 4 se encuentran actividades donde se deben relacionar una figura plana con su imagen a través de una traslación y, por último, en el nivel 5, aquellas actividades donde los estudiantes deben elaborar argumentos utilizando las propiedades de las isometrías. Un ejemplo de esto último se puede considerar en la siguiente tarea, para que los adolescentes justifiquen un error de construcción.

Andrés simetrizó el triángulo ABC respecto al eje **e** y obtuvo el triángulo A'B'C', pero el profesor le dijo que lo revisara porque no estaba bien.



¿Por qué no es correcto lo que realizó Andrés?

Para resolver esta tarea correctamente los estudiantes podrían aludir a que el triángulo debería estar "para el otro lado", hacer referencia a que la distancia entre A y el eje debe ser igual que entre A' y el eje o que el punto B' debería estar donde está el C', entre otros argumentos.

Las actividades del bloque Geometría que se incluyen en Aristas en Clase 2022 ejemplifican las tres progresiones de los niveles de desempeño del bloque temático. En ellas se hace énfasis en la identificación de elementos, propiedades y relaciones entre las figuras (plano y espacio), así como en las transformaciones isométricas del plano en el plano.

ÁLGEBRA

El bloque Álgebra se centra en la interpretación y la generalización de patrones y expresiones; en la comprensión y el uso de expresiones algebraicas para representar y resolver ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones, y en la comprensión y el uso de expresiones, relaciones y distintas representaciones de las funciones para modelizar situaciones (INEEd, 2017).

El tipo de ecuaciones de segundo grado que se consideran son las incompletas o expresables como cuadrado de un binomio o producto de binomios conjugados. De igual modo, se consideran solo las funciones de la forma $f(x) = ax + b$, con a y b números reales, que se denominarán "funciones lineales" a efectos de simplificar.

Los descriptores del bloque Álgebra están distribuidos entre el nivel 2 y el nivel 5 de desempeños, mientras que los matices entre estos niveles están relacionados con el grado en que los estudiantes logran resolver o identificar el conjunto solución de ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2, además de validar y argumentar sobre su solución. También, entre un nivel y otro, varían las habilidades respecto a la representación de funciones lineales y la modelación de situaciones provenientes de diferentes contextos.

En el nivel 2 los estudiantes pueden, por ejemplo, relacionar un punto en el plano con sus coordenadas cartesianas, determinar el valor numérico de expresiones algebraicas de una variable y resolver ecuaciones de primer grado del tipo $ax + b = cx + d$, con solución entera. También continúan secuencias numéricas a partir de un patrón dado y expresan generalizaciones en lenguaje natural en secuencias aritméticas o geométricas sencillas.

En el nivel 3 expresan situaciones provenientes de contextos geométricos y sociales que se pueden modelizar utilizando funciones y ecuaciones de primer grado. A su vez, calculan valores numéricos y realizan operaciones sencillas con expresiones algebraicas. Además, relacionan la representación gráfica con la tabla de valores de una función lineal y resuelven ecuaciones de primer grado con solución racional.

Mientras, los estudiantes que se encuentran en el nivel 4 expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos sociales, que se pueden modelizar utilizando ecuaciones de segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Asimismo, realizan operaciones entre expresiones algebraicas y relacionan la expresión analítica con la tabla de valores o con la representación gráfica de una función lineal. También identifican el conjunto solución de una ecuación de segundo grado y el de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, e interpretan sus soluciones en relación con la situación modelizada.

En el nivel 5 los estudiantes expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos matemáticos utilizando funciones lineales, ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Además, argumentan sobre la validez del conjunto solución de ecuaciones de primer y segundo grado y de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, con relación a la situación modelizada.

La primera progresión que se presenta en este bloque hace foco en las funciones lineales, su reconocimiento e interpretación. La segunda se centra en la resolución e interpretación de la solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones. La tercera progresión se focaliza en el manejo de expresiones algebraicas y la cuarta se basa en expresar algebraicamente diversas situaciones provenientes de contextos sociales, geométricos y matemáticos en general.

En Aristas en Clase se incluyen siete actividades del bloque Álgebra que ejemplifican las cuatro progresiones.

Actividad 20 Nivel 3

¿Cuál de las siguientes funciones tiene por representación gráfica una recta?

A) $f(x) = 2x^2 + 1x + 3$

B) $g(x) = -\frac{1}{2}x.x + 1$

C) $h(x) = 1x + 2$

D) $i(x) = \frac{1x + 2}{2x}$

Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen diferentes representaciones de funciones	
Descriptor		Reconocen la expresión analítica de una función lineal	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	$f(x) = 2x^2 + 1x + 3$	Responden con la expresión analítica de una función polinómica de segundo grado por ser familiar para el estudiante.	29,3
B	$g(x) = -\frac{1}{2}x.x + 1$	Responden con una expresión no reducida de segundo grado. No reconocen que $x.x=x^2$.	16,8
C	$h(x) = 1x + 2$	**RESPUESTA CORRECTA** Reconocen la expresión analítica de una función lineal entre otras que no lo son. Identifican que la expresión tiene un término de primer grado y el término independiente.	**31,7**
D	$i(x) = \frac{1x + 2}{2x}$	Responden con la expresión analítica de una función racional. Posiblemente identifican dos expresiones de primer grado, donde una no tiene término independiente.	15,7
Sin respuesta			6,5
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben reconocer la expresión analítica de una función lineal, que tiene por representación gráfica una recta, entre otras que no lo son.

Casi la tercera parte de los estudiantes resuelve la actividad correctamente (opción C, 31,7%), eligiendo la única expresión analítica que representa una función lineal. Estos jóvenes pueden identificar que las expresiones de la forma f(x) = ax + b, con a y b enteros y a distinto de cero, tienen por representación gráfica una recta y, por ende, representan funciones lineales.

Un porcentaje similar (29,3%) elige la opción A, identificando a una expresión polinómica de segundo grado como la que representa a una función lineal. Seguramente estos estudiantes respondan con la expresión que les resulta más familiar, por ser una expresión algebraica que suele trabajarse en el curso de tercero de media.

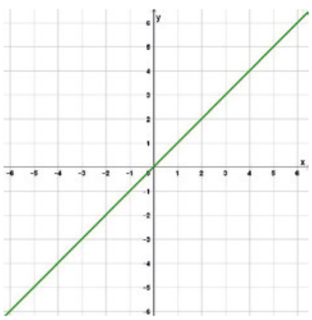
Los estudiantes que eligen la opción B (16,8%) responden con una expresión de segundo grado desarrollada. Probablemente no reconozcan que el producto de x . x es x^2. Por otro lado, un 15,7% de los estudiantes elige la opción D, que muestra una expresión racional donde el numerador y el denominador son expresiones de primer grado. Los estudiantes podrían elegir esta opción por observar que tiene dos expresiones de primer grado donde una no tiene término independiente (denominador).

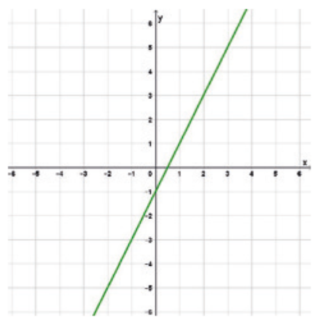
Otro desempeño de esta progresión, también en el nivel 3, involucra el reconocimiento de gráficos de funciones lineales y el relacionamiento de tablas y gráficos de estas funciones. Un ejemplo de esto se puede ver en la siguiente tarea, de la edición 2018 de Aristas en Clase.

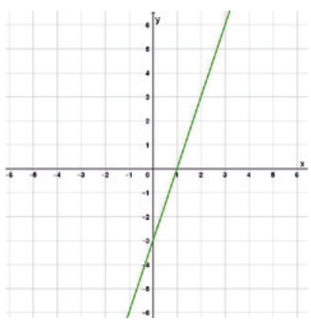
La siguiente tabla de valores corresponde a una función:

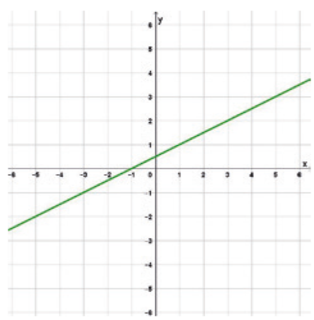
x	f(x)
1	1
2	3
3	5

¿En cuál de los siguiente gráficos se representa dicha función?

A)


B)


C)


D)


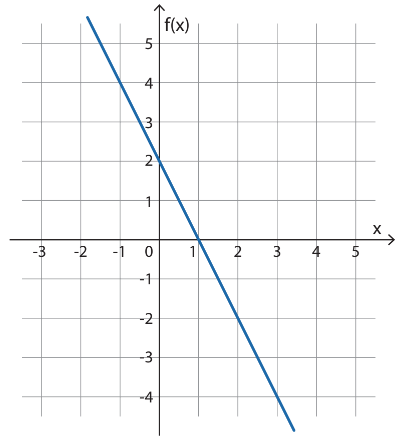
Fuente: INEEd (2020b, p. 60).

Por otro lado, en la misma progresión, pero en el nivel 4, se encuentran las actividades donde los estudiantes deben relacionar la expresión analítica de una función lineal con una tabla de valores o con su gráfico y las que analizan e interpretan el modelo de la función lineal con relación a la situación social modelizada.

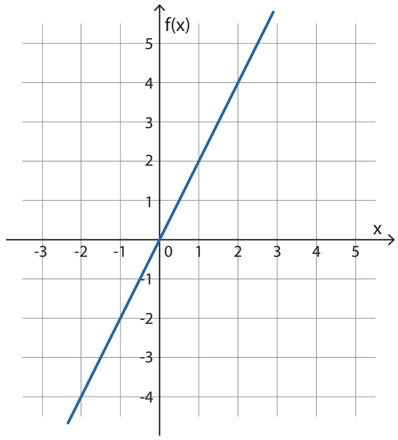
La siguiente tarea es un ejemplo donde dada una expresión analítica, los estudiantes deben reconocer su gráfico.

¿Cuál de los siguientes gráficos podría asociarse con la función f definida por f(x)=1x+2?

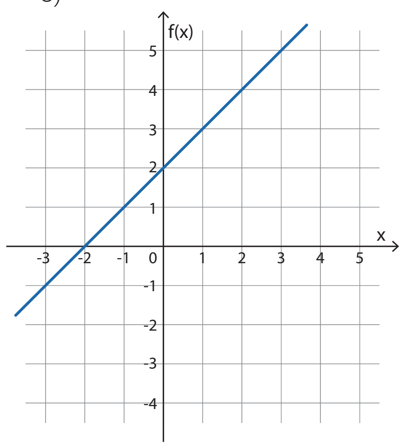
A)



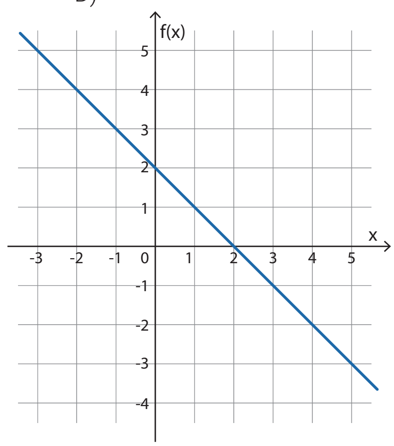
B)



C)



D)



Además, en el nivel 5 los estudiantes interpretan el modelo de la función lineal, para cualquier situación. Estos pueden interpretar el crecimiento o signo de la función, o bien el significado del coeficiente angular o del término independiente en una situación. Un ejemplo de esto se muestra en la siguiente tarea:

La ganancia de una empresa que alquila fotocopiadoras está dada por la siguiente expresión f(x) = 0,5x + 500, donde x es la cantidad de fotocopias realizadas y f(x) es el dinero que reciben por el alquiler mensual.

¿Qué representa para la empresa el término independiente de esa expresión?

La actividad 21 se incluye en una progresión con foco en la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Actividad 21 Nivel 2

¿Cuál es la solución de la ecuación 2x - 5 = 7?

A) x = -6

B) x = -1

C) x = 1

D) x = 6

Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Realizan cálculos algebraicos y numéricos asociados y usan patrones	
Descriptor		Resuelven ecuaciones de primer grado del tipo ax + b = cx + d, con solución entera	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	x = -6	Sustituyen la x por -6 y multiplican sin considerar el signo negativo, obteniendo 12 – 5 = 7. O bien trasponen correctamente el -5 obteniendo 2x = 12, pero cambiando el signo al dividir.	14,3
B	x = -1	Sustituyen la x por -1, obteniendo -2 - 5 y considerándolo igual a 7. O bien trasponen con error el -5 obteniendo 2x = 2 y cambian el signo al dividir.	15,4
C	x = 1	Sustituyen la x por 1, obteniendo 2 - 5 y considerándolo igual a 7. O bien trasponen con error el -5 obteniendo 2x = 2 y resuelven correctamente.	13,6
D	x = 6	**RESPUESTA CORRECTA** Identifican la solución de una ecuación de primer grado. Sustituyen la x por 6, obteniendo 12 – 5 = 7. O bien resuelven la ecuación trasponiendo el -5, obteniendo 2x = 12, y luego dividen 12 entre 2.	**54,3**
Sin respuesta			2,4
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben encontrar la solución de una ecuación de primer grado de la forma ax + b = cx + d, con a, b, c y d enteros y solución entera. Los estudiantes que responden correctamente (opción D, 54,3%) resuelven la ecuación algebraicamente obteniendo que x = 6, o bien sustituyen los valores hasta identificar que 6 verifica la igualdad.

Otro 43,3% (opciones A, B y C) no logra resolver la actividad correctamente. En particular, el 13,6% elige la opción C, que se obtiene al trasponer con error el -5, obteniendo como solución a 1. Un 15,4% elige como solución de la ecuación al -1. Estos estudiantes, posiblemente al sustituir la x por -1, para verificar la ecuación, obtienen la expresión -2 - 5 considerándola igual a 7, o bien al resolver cometen errores de proceso. En una proporción similar a la anterior (14,3%), los estudiantes eligen la opción A, en la cual se indica que la solución es -6, probablemente, al igual que en las anteriores opciones, por cometer errores operatorios o por resolver la ecuación con errores de procedimiento.

Esta actividad es de la dimensión aplicación y del nivel 2 de desempeños, ya que involucra la resolución de una ecuación de primer grado con solución entera. Si la solución fuera un número racional, la tarea correspondería al nivel 3, y si los estudiantes tuvieran que identificar el conjunto solución de una ecuación de segundo grado o de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas, correspondería al nivel 4, como el siguiente ejemplo de Aristas en Clase 2018.

Considera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - 3y = 10 \\ 5x + y = -14 \end{cases}$$

¿Cuál de las siguientes opciones es el conjunto solución del sistema?

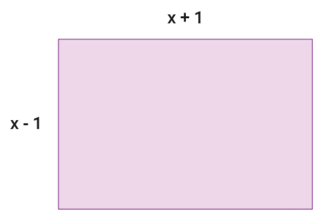
A) $S = \{(-5 ; -5)\}$
B) $S = \{(1 ; -3)\}$
C) $S = \{(5 ; 1)\}$
D) $S = \{(-2 ; -4)\}$

Fuente: INEEd (2020b, p. 63).

En otro desempeño de esta progresión, también en el nivel 4, se encuentran actividades donde los estudiantes deben validar la solución de ecuaciones de primer grado e interpretar las soluciones de una ecuación de segundo grado o la solución de un sistema de ecuaciones con relación a la situación modelizada. Un ejemplo de este último caso se muestra en la siguiente actividad de la edición 2018 de Aristas en Clase.

Para calcular los lados del rectángulo de la figura, cuya superficie es 24 cm², Estefani plantea y resuelve correctamente esta ecuación:

$$\begin{aligned} (x - 1) \,.\, (x + 1) &= 24 \\ x^2 - 1 &= 24 \\ x^2 &= 25 \\ x = \pm\sqrt{25} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 5 \end{cases} \end{aligned}$$



¿En cuál de las opciones están todos los valores de x que generan las medidas de los lados de este rectángulo?

A) x = -5 y x = 5
B) x = -5
C) x = 5
D) x = 1 y x = 5

Fuente: INEEd (2020b, p. 65).

Las actividades 22 y 23 son ejemplos de una progresión centrada en el tratamiento de expresiones algebraicas.

Actividad 22 Nivel 3

Considera la expresión $g(x) = x^2 + 4x - 5$.
¿Cuál es el valor de $g(-3)$?

A) -8
B) -13
C) -23
D) -26

Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Realizan cálculos algebraicos y numéricos asociados y usan patrones	
Descriptor		Calculan valores numéricos de expresiones algebraicas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	-8	**RESPUESTA CORRECTA** Calculan el valor numérico en la expresión algebraica $g(x) = x^2 + 4x - 5$ cuando x toma el valor -3. Plantean $g(-3) = (-3)^2 + 4.(-3) - 5$ y luego realizan los cálculos obteniendo -8.	**38,7**
B	-13	Sustituyen el número -3 en la expresión algebraica sin colocar paréntesis. Realizan: $g(-3) = -3^2 + 4 - 3 - 5$, obteniendo -13.	30,2
C	-23	Sustituyen el número -3 en la expresión algebraica y calculan con error la potencia. Realizan $g(-3) = (-3)^2 + 4 . (-3) - 5$, obteniendo -6 - 12 - 5 = -23.	12,7
D	-26	Sustituyen el número -3 en la expresión algebraica sin colocar paréntesis al calcular la potencia. Realizan $g(-3) = -3^2 + 4 . (-3) - 5$, obteniendo -9 - 12 - 5 = -26.	12,0
Sin respuesta			6,4
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben reconocer la notación asociada al cálculo del valor numérico de una expresión algebraica y sustituir el valor dado en la expresión. Los estudiantes que la resuelven correctamente (opción A, 38,7%) identifican que encontrar el valor de $g(-3)$ implica sustituir la x por -3 y realizar la operación correspondiente.

Aproximadamente tres de cada diez estudiantes (30,2%) eligen la opción B: posiblemente, al sustituir -3 en la expresión, no consideran los paréntesis para calcular la potencia inicial ni el producto. La opción C es elegida por un 12,7%, en la que probablemente los estudiantes hayan cometido el error frecuente de calcular la potencia $(-3)^2$ como -3×2. En similar proporción, un 12% elige la opción D, que involucra el cálculo de la potencia de forma incorrecta por no colocar paréntesis: $-3^2 = -9$. Cabe destacar que un 6,4% de los estudiantes no responden la actividad, esto puede deberse a que al realizar la sustitución encuentran un valor que no aparece en las opciones, por errores operatorios o también a que no reconozcan el significado de la expresión $g(-3)$.

Esta actividad de la dimensión aplicación da cuenta del nivel 3 de desempeños y requiere que los estudiantes calculen el valor numérico de una expresión de segundo grado, además de reconocer la representación matemática de esta operación. Las actividades del mismo tipo, pero en las que las expresiones algebraicas son de primer grado (y con una variable) corresponden al nivel 2. Otro matiz de la progresión se ejemplifica en la actividad 23, en la que los estudiantes deben operar con expresiones algebraicas.

Actividad 23 Nivel 4

¿Cuál de las siguientes expresiones se obtiene al desarrollar $(2x - 3).(-3x + 5)$ y reducir?

A) $-2x^3$

B) $-6x^2 - 15$

C) $-6x^2 + 19x - 15$

D) $-1x + 2$

Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Realizan cálculos algebraicos y numéricos asociados y usan patrones	
Descriptor		Realizan operaciones entre expresiones algebraicas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	$-2x^3$	Desarrollan correctamente, pero reducen con error. Realizan $(2x - 3)(-3x + 5) = 6x^2 + 10x + 9x - 15$. Luego suman los coeficientes obteniendo -2 y responden con una expresión de tercer grado.	14,7
B	$-6x^2 - 15$	Multiplican solo los términos semejantes y reducen correctamente. Realizan: $(2x - 3)(-3x + 5) = 2x . (-3x) - 3{,}5$, obteniendo $-6x^2 - 15$.	31,6
C	$-6x^2 + 19x - 15$	**RESPUESTA CORRECTA** Realizan las operaciones algebraicas en forma correcta y reducen. Desarrollan aplicando la propiedad distributiva y luego asocian los términos semejantes. Realizan $(2x - 3)(-3x + 5) = -6x^2 + 10x + 9x - 15$ y luego reducen a $-6x^2 + 19x - 15$.	**26,5**
D	$-1x + 2$	Responden con esta expresión pues suma los términos semejantes del primer paréntesis y del segundo, no aplican la propiedad distributiva: $(2x - 3)(-3x + 5) = 2x - 3x -3 + 5$ obteniendo así $-1x + 2$.	22,7
Sin respuesta			4,5
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben realizar una multiplicación entre dos expresiones algebraicas de primer grado aplicando la propiedad distributiva y luego encontrar el polinomio reducido que es equivalente a la expresión dada.

Un 26,5% de los estudiantes responden correctamente (opción C), encontrando que la expresión desarrollada y reducida que se corresponde con la multiplicación es $-6x^2 + 19x - 15$.

Casi un tercio de los estudiantes (31,6%) responden que la expresión equivalente a la multiplicación dada es $-6x^2 - 15$ (opción B), siendo la expresión que resulta de multiplicar únicamente los términos semejantes. Esto puede deberse a que reconocen que en la adición y sustracción de expresiones algebraicas se opera solamente entre estos términos y lo extrapolan a la multiplicación. En estos casos, se pueden recuperar con los estudiantes las diferencias entre operar entre números y entre expresiones recuperando, por ejemplo, la propiedad distributiva.

Un 22,7% de los estudiantes eligen la opción D, quienes posiblemente reducen las expresiones que se dan en la multiplicación sin aplicar la propiedad distributiva y operando como si fuera una suma de polinomios, en lugar de un producto. La opción A es elegida por un 14,7% de los estudiantes, quienes, posiblemente, luego de aplicar la propiedad distributiva, cometen errores al reducir la expresión.

Estos errores típicos se reportan en diversas investigaciones sobre la iniciación al álgebra en la educación media. Por ejemplo, para poder hacer la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra y discernir entre ambos es necesario que el estudiante reconozca la naturaleza y significado de los símbolos. El símbolo + en aritmética se interpreta como una acción a realizar, es decir, que significa realizar la operación. En álgebra puede indicar el resultado y la acción y esto no es fácilmente apreciado por los estudiantes (Socas, Camacho, Palarea, y Hernández, 1989).

Cabe destacar que la ejecución correcta de las operaciones entre expresiones algebraicas desempeña un papel fundamental en el ámbito del álgebra. Las rutinas de cálculo relacionadas con este tipo de expresiones podrían repercutir en el aprendizaje de otros conceptos matemáticos. En este sentido, es importante reconocer la trascendencia de abordar con precisión estas operaciones, ya que los errores que surgen en esta etapa pueden manifestarse de manera persistente en la resolución posterior de ecuaciones, sistemas y otras situaciones algebraicas.

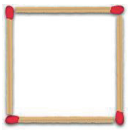
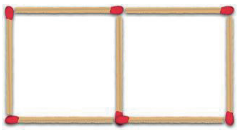
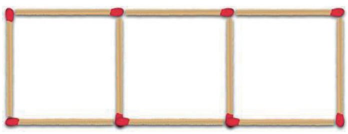
Esta actividad, que corresponde al nivel 4 de desempeños, involucra la multiplicación de expresiones de primer grado. Aquellas tareas en las que se realizan adiciones o sustracciones entre expresiones algebraicas dan cuenta del nivel 3. Por ejemplo, se pueden considerar tareas como la siguiente:

> Reduce la expresión
>
> $(2x+3) - (3x-1)$

La cuarta y última progresión de los niveles de desempeño del bloque Álgebra tiene foco en el uso de esta rama de la matemática para modelizar diversas situaciones provenientes de distintos contextos. Ejemplos de esta progresión se encuentran en las actividades 24, 25 y 26.

Actividad 24 Nivel 2

Observa la siguiente secuencia:

Número de figura	Figura	Cantidad de fósforos
1		4
2		7
3		10

Si se continúa la secuencia, ¿cómo se puede calcular la cantidad de fósforos que se necesitan, a partir del número de figura?

A) Multiplicando el número de figura por 4.

B) Multiplicando el número de figura por 3 y sumando 1.

C) Multiplicando el número de figura por 2 y sumando 2.

D) Multiplicando el número de figura por 2 y sumando 3.

Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Modeliza e interpreta situaciones usando enfoque algebraico	
Descriptor		Expresan generalizaciones en lenguaje natural vinculadas a secuencias aritméticas o geométricas sencillas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	Multiplicando el número de figura por 4.	Consideran que para formar los cuadrados se necesitan cuatro fósforos. No reconocen que dos cuadrados consecutivos tienen un fósforo en común.	17,6
B	Multiplicando el número de figura por 3 y sumando 1.	**RESPUESTA CORRECTA** Generalizan en lenguaje natural una secuencia geométrica. Pueden reconocer que en cada figura se agregan 3 fósforos y a esto se le suma el fósforo inicial, o bien encontrar otras alternativas equivalentes.	**47,6**
C	Multiplicando el número de figura por 2 y sumando 2.	Consideran la cantidad de vértices de los cuadrados formados, sin repetir los que coinciden en dos fósforos.	15,6
D	Multiplicando el número de la figura por 2 y sumando 3.	Consideran que para pasar de una figura a la siguiente se suman 3, pero no verifican la regla de multiplicar por 2.	17,3
Sin respuesta			1,9
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben generalizar en lenguaje natural una secuencia geométrica sencilla. Casi la mitad de los estudiantes (47,6%) responden correctamente con la opción B, indicando que para calcular la cantidad de fósforos necesarios para formar la figura n de la secuencia geométrica se agregan 3 fósforos y luego se le suma el fósforo inicial, o bien encuentran una regla diferente pero equivalente.

El 17,3% de los estudiantes (opción D) señala que para obtener el número de fósforos a partir del número de figura de la secuencia se debe multiplicar el número de figura por 2 y luego sumar 3. Posiblemente estos estudiantes verifican la regla para la figura 2, pero no para las demás figuras que se muestran en la secuencia.

En similar proporción, un 17,6% indica que la cantidad de fósforos se puede obtener multiplicando el número de figura por 4 (opción A). Probablemente, quienes eligen esta opción comprueben que la regla elegida se verifica para la figura 1, aunque no para las otras. Por su parte, el 15,6% de los estudiantes elige la opción C, en la cual se indica que la cantidad de fósforos se obtiene multiplicando el número de figura por 2 y sumando 2 (relación que también se verifica, solamente, para la figura 1).

Esta actividad de la dimensión comprensión y del nivel 2 de desempeños involucra generalizaciones en lenguaje natural vinculadas a secuencias geométricas sencillas. Siguiendo con la progresión, pero en el nivel 3, se encuentra la actividad 25, que involucra expresar generalizaciones en secuencias aritméticas.

Actividad 25 Nivel 3

Si x es un número par cualquiera, ¿qué expresión permite obtener el número par siguiente de x?

A) $2x$	B) $x + 2$	C) $x + 1$	D) $2x + 1$

Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Modelizan e interpretan situaciones usando enfoque algebraico	
Descriptor		Expresan generalizaciones en lenguaje algebraico que involucran secuencias aritméticas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	2x	Responden con la expresión que permite encontrar el doble de un número cualquiera.	27,8
B	x + 2	**RESPUESTA CORRECTA** Utilizan lenguaje algebraico para generalizar propiedades o regularidades provenientes de contextos numéricos. Reconocen que la diferencia entre dos números pares consecutivos es 2 y plantean la suma entre x y 2.	**40,4**
C	x + 1	Consideran la expresión “número siguiente” y suman 1 a x.	19,6
D	2x + 1	Consideran la expresión “número par” y multiplican el valor de x por 2 y luego suman 1 buscando encontrar el “siguiente”.	10,5
Sin respuesta			1,7
Total			100

Al resolver esta actividad los estudiantes deben expresar algebraicamente una relación numérica dada en lenguaje natural. Los que responden correctamente (opción B, 40,4%), identifican que el siguiente número par debe obtenerse sumando 2 al valor de x (identificando previamente que x es un número par).

En cambio, más de la mitad de los estudiantes (57,9%) responde con errores relacionados a la interpretación de las expresiones "número par", "siguiente" o ambas. En este sentido, se puede observar que un 27,8% responde con la expresión que permite obtener un número par cualquiera o el doble del número dado (opción A), mientras que un 19,6% responde con la opción que permite obtener el número siguiente de un número x, asociando siguiente con "+1" (opción C).

En menor proporción, el 10,5% elige la opción D, en la cual se muestra la expresión 2x + 1. Posiblemente, en esta última opción, los estudiantes vinculan el término 2x con la expresión "número par" y al +1 con la expresión "siguiente".

Esta actividad involucra generalizaciones en lenguaje algebraico en secuencias aritméticas y corresponde al nivel 3. Otro ejemplo de esta progresión, también de nivel 3, implica expresar situaciones provenientes de contextos sociales que se pueden modelizar utilizando funciones o ecuaciones de primer grado. Un ejemplo de este desempeño podría ser la siguiente tarea:

> Una empresa de transporte de paquetes aplica una tarifa que consiste en un cargo fijo de $300 por cada viaje, además de un costo adicional de $35 por cada kilómetro recorrido.
>
> Si x es la cantidad de kilómetros recorridos, escribe una expresión que represente cuánto dinero f(x) cobran por transportar un paquete.

Siguiendo con esta progresión, en el nivel 4 se encuentran las actividades donde se modelizan situaciones provenientes de contextos sociales, utilizando ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, tal como se ejemplifica en la actividad 26.

Actividad 26 Nivel 4

En la clase se planteó esta propuesta:

En una panadería se fabrican tartas saladas y dulces. Para la masa de las tartas saladas se necesitan 125 g de manteca y 2 huevos. Para la masa de las tartas dulces se necesitan 150 g de manteca y 3 huevos. Para un pedido de tartas se han utilizado 2 kg de manteca y 35 huevos.

Si x representa la cantidad de tartas saladas e y representa la cantidad de tartas dulces, ¿con cuál de los siguientes sistemas de ecuaciones se podría calcular cuántas tartas de cada tipo se han elaborado para dicho pedido?

A) $\begin{cases} 150x + 125y = 2 \\ 3x + 2y = 35 \end{cases}$

B) $\begin{cases} 150x + 3y = 2 \\ 125x + 2y = 35 \end{cases}$

C) $\begin{cases} 125x + 2y = 2000 \\ 150x + 3y = 35 \end{cases}$

D) $\begin{cases} 125x + 150y = 2000 \\ 2x + 3y = 35 \end{cases}$

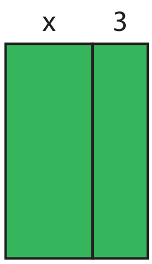
Bloque temático		Álgebra	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Modelizan e interpretan situaciones usando enfoque algebraico	
Descriptor		Expresan algebraicamente situaciones provenientes de contextos sociales, que se pueden modelizar utilizando sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	$\begin{cases} 150x + 125y = 2 \\ 3x + 2y = 35 \end{cases}$	Modelizan correctamente con una expresión para relacionar la cantidad de manteca utilizada y otra para vincular la cantidad de huevos. Intercambian los roles de las incógnitas: consideran x como cantidad de tartas dulces e y como cantidad de tartas saladas y no tienen en cuenta la conversión de unidades, utilizando 2 kilogramos, en vez de 2.000 gramos.	18,5
B	$\begin{cases} 150x + 3y = 2 \\ 125x + 2y = 35 \end{cases}$	Modelizan con una expresión para cada tipo de tarta, en vez de para cada ingrediente, igualando primero a la cantidad de manteca (en kilogramos) y en la segunda, a la cantidad de huevos.	28,2
C	$\begin{cases} 125x + 2y = 2000 \\ 150x + 3y = 35 \end{cases}$	Modelizan con una expresión para cada tipo de tarta, en vez de para cada ingrediente, igualando primero a la cantidad de manteca (en gramos) y a la cantidad de huevos en la segunda.	25,7
D	$\begin{cases} 125x + 150y = 2000 \\ 2x + 3y = 35 \end{cases}$	**RESPUESTA CORRECTA** Modelizan una situación utilizando un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Plantean una ecuación para vincular la cantidad de manteca utilizada en ambos tipos de tartas y otra para vincular la cantidad de huevos utilizados.	**22,1**
Sin respuesta			5,5
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben modelizar una situación proveniente de un contexto social mediante un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Los estudiantes que responden correctamente eligen la opción D (22,1%). Estos identifican que la suma de los gramos de manteca en ambos tipos de tartas es de 2.000 y que la suma de la cantidad de huevos es 35.

Por otra parte, un 72,4% modeliza con error la situación. Un 18,5% invierte el uso de la x y la y y no convierte los kilogramos a gramos (opción A). Un 28,2% y un 25,7% modelizan con una ecuación para cada tipo de tarta (opciones B y C, respectivamente). Estos estudiantes igualan una de las ecuaciones a la cantidad de huevos y otra a la cantidad de manteca, en kilogramos o en gramos.

Esta actividad de la dimensión comprensión involucra generalizar situaciones sociales con sistemas de ecuaciones, lo cual da cuenta del nivel 4. Si en cambio la situación a modelizar proviniera de contextos matemáticos, la actividad daría cuenta del nivel 5, ya sea para modelizar con funciones o ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado o sistemas.

Un ejemplo de desempeño del nivel 5 puede involucrar modelizar el área de un rectángulo, como se muestra en la siguiente tarea.



El alto del rectángulo verde es el doble del ancho y su área es 60. Escribe una ecuación que permita encontrar las dimensiones del rectángulo verde.

Las cuatro progresiones que abordan el bloque Álgebra se ejemplificaron, en este documento, mediante siete actividades. Estas se enfocan en expresar algebraicamente situaciones provenientes de contextos geométricos y sociales, en la resolución de ecuaciones y en el análisis de las funciones lineales.

ARITMÉTICA

El bloque Aritmética comprende el estudio del concepto de número, las relaciones entre números y sus propiedades y su uso en la resolución de situaciones diversas. Implica la interpretación de números naturales, enteros y racionales; el reconocimiento de la equivalencia de distintas representaciones numéricas, y su uso para calcular y resolver problemas. Asimismo, incluye el establecimiento de relaciones de orden entre cantidades numéricas y la identificación de regularidades numéricas. En cuanto a la divisibilidad en el conjunto de los números naturales, el énfasis está puesto en las relaciones entre múltiplos y divisores.

Los descriptores de desempeños del bloque Aritmética (tabla 2) están distribuidos en los cuatro primeros niveles.

En el nivel 1 los estudiantes reconocen propiedades básicas de los números enteros, mientras que en el nivel 2 establecen relaciones de orden con los números enteros, reconocen propiedades básicas de los números racionales y de las operaciones. También resuelven situaciones simples que implican cálculos aritméticos, operaciones combinadas entre números enteros o entre decimales y proporcionalidad directa. En el nivel 3 reconocen y utilizan diferentes representaciones de los números racionales, realizan operaciones combinadas entre números enteros y fracciones, al tiempo que logran argumentar sobre su equivalencia. Además, resuelven situaciones que conllevan varios pasos usando proporcionalidad directa y argumentan sobre relaciones entre múltiplos y divisores. También resuelven situaciones que implican aproximaciones decimales. En el nivel 4 los estudiantes realizan operaciones combinadas entre números racionales que están escritos en diferente registro.

Los matices de los descriptores de los niveles de desempeño están relacionados con los logros de los estudiantes en relación con el reconocimiento de propiedades de números racionales y su aplicación, en las operaciones, en situaciones de proporcionalidad y en las relaciones entre múltiplos y divisores.

En el bloque Aritmética hay cuatro progresiones de desempeños. Una progresión está centrada en los números racionales y sus representaciones, otra enfocada en las operaciones y sus propiedades, la tercera hace énfasis en las relaciones de proporcionalidad directa y la última se centra en las relaciones entre múltiplos y divisores. La prueba de Aristas en Clase 2022 contiene actividades de la primera y la tercera progresión. Las actividades 27 y 28 corresponden a la progresión centrada en los números racionales y su representación.

Actividad 27 Nivel 2

Cuatro amigos participan de un juego. Cada uno recibe cuatro cartas con números y debe ordenarlas de menor a mayor.

Jugador A	Jugador B
0 -67 746 -5200	-8 -11 -710 -4205
Jugador C	**Jugador D**
-93 -455 52 940	-2100 -354 108 827

Solo uno de los jugadores ordenó sus cartas correctamente, ¿quién fue?

A) El jugador A.
B) El jugador B.
C) El jugador C.
D) El jugador D.

Bloque temático		Aritmética	
Dimensión		Aplicación	
Dominio		Establecen relaciones de orden y calcula, usando números racionales	
Descriptor		Ordenan números enteros	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	El jugador A.	Ordenan los números enteros según sus valores absolutos sin tener en cuenta el signo.	6,7
B	El jugador B.	Ordenan los números enteros negativos como si fueran positivos. No consideran el signo de los números negativos.	20,8
C	El jugador C.	Reconocen que los números enteros positivos son mayores a los negativos, pero dentro de los negativos consideran que es más grande el de mayor valor absoluto.	5,9
D	El jugador D.	**RESPUESTA CORRECTA** Identifican números enteros ordenados en forma creciente. Reconocen que entre dos números enteros negativos es menor el de mayor valor absoluto y que entre dos números positivos es menor el de menor valor absoluto. Identifican también que todos los números negativos son menores a los positivos.	**66,0**
Sin respuesta			0,6
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben elegir un ordenamiento de números enteros. Dos tercios lo hacen correctamente (opción D, 66%), donde aparece un conjunto de números enteros ordenados de menor a mayor. Estos adolescentes reconocen que los números negativos son menores que los positivos y que entre dos negativos es menor el de mayor valor absoluto.

Un quinto de los estudiantes (opción B, 20,8%) elige un listado de números negativos ordenados de mayor a menor, es decir, sin considerar el signo. Por último, pero en menor proporción (6,7 y 5,9%), eligen las opciones A y C, respectivamente, que involucran órdenes sin considerar el valor absoluto de los números.

Esta actividad de la dimensión aplicación, que requiere ordenar números enteros, corresponde al nivel 2 de desempeños.

Otro desempeño de la progresión involucra el reconocimiento del opuesto y del valor absoluto de un número racional. Ejemplos de estas actividades se encuentran en la edición 2018 de Aristas en Clase, donde identificar el opuesto de un número entero da cuenta del nivel 1 y el valor absoluto de un número racional corresponde al nivel 2.

¿Cuál de los siguientes números es el opuesto de 12?

A) $-\frac{1}{12}$

B) $\frac{1}{12}$

C) -12

D) 12

¿Cuál de estas opciones es verdadera?

A) $\left|\frac{3}{2}\right| = -\frac{3}{2}$

B) $\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

C) $\left|\frac{3}{2}\right| = -\frac{2}{3}$

D) $\left|\frac{3}{2}\right| = \frac{2}{3}$

Fuente: INEEd (2020b, pp. 68-69).

En esta misma progresión centrada en los números racionales se encuentran actividades de representación, tal como la 28.

Actividad 28 Nivel 3

¿Cuál de las siguientes representaciones corresponde al número -8?

A) $(-2)^3$
B) $(-2)^4$
C) -1^8
D) 8^{-1}

Bloque temático		Aritmética	
Dimensión		Información	
Dominio		Reconocen distintas representaciones de los números racionales y de las propiedades de las operaciones	
Descriptor		Reconocen representaciones de números racionales en distintos registros	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	$(-2)^3$	**RESPUESTA CORRECTA** Reconocen dos representaciones de un número entero. Identifican que el -8 se puede representar como la potencia $(-2)^3$. O bien calculan (-2) (-2) (-2) = -8.	**33,2**
B	$(-2)^4$	Consideran que $(-2)^4$ = (-2) . 4 = -8.	25,3
C	-1^8	Consideran que -1^8 = -1,8 = -8.	16,6
D	8^{-1}	Consideran que $8^{(-1)}$ = 8 . (-1) = -8.	23,8
Sin respuesta			1,1
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben reconocer representaciones de los números racionales en distintos registros. En particular, aproximadamente un tercio (33,2%) reconoce que el número -8 es igual a la potencia $(-2)^3$ (opción A).

Una cuarta parte de los estudiantes (25,3%) considera que -8 es igual a $(-2)^4$ (opción B), posiblemente por cometer errores al calcular la potencia. En una proporción similar, un 23,8% considera que -8 es igual a 8^{-1} (opción D) y, en menor proporción, un 16,6% supone que -8 es igual a -1^8 (opción C).

Posiblemente, quienes eligen las opciones B, C o D multiplican la base por el exponente en lugar de aplicar una potencia.

En esta actividad los estudiantes deben reconocer representaciones de números racionales en distinto registro. Específicamente, una potencia de base entera y exponente natural. A su vez, en el nivel 3 también se incluyen actividades donde los estudiantes deben argumentar sobre la equivalencia de fracciones y resolver situaciones que implican aproximaciones decimales.

Otra progresión dentro del bloque Aritmética involucra las relaciones de proporcionalidad directa. Las actividades 29 y 30 constituyen ejemplos de esta progresión.

Actividad 29 Nivel 2

Enzo está haciendo limonada con la siguiente receta:

Ingredientes para limonada clásica

- 1,25 litros de agua fría
- 0,45 litros de jugo de limón (8 a 10 limones)
- 225 g de azúcar
- 1 pizca de sal (opcional)

Por cada litro de agua fría, ¿cuántos litros de jugo de limón se necesitan para respetar la proporción de la receta?

A) 0,2

B) 0,36

C) 0,4

D) 0,56

Bloque temático		Aritmética	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Resuelven y modelizan situaciones que implican el uso de los números racionales y la relación de proporcionalidad	
Descriptor		Resuelven situaciones simples de proporcionalidad directa	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	0,2	Restan 0,25 a 0,45 tomando la relación que hay entre 1,25 litros y 1 litro. Responden con 0,2.	14,7
B	0,36	**RESPUESTA CORRECTA** Resuelven una situación simple de proporcionalidad directa. Aplican una regla de tres: $\frac{1,25}{0,45}=\frac{1}{x}$, obteniendo entonces que x = 1 × 0,45 ÷ 1,25 = 0,36. O bien calculan el coeficiente de proporcionalidad realizando 0,45 ÷ 1,25 = 0,36.	**45,5**
C	0,4	Estiman que el jugo de limón necesario para la receta será “un poco menos” que 0,45, por lo que responden con 0,4.	20,0
D	0,56	Plantean la regla de tres con error: $\frac{1,25}{0,45}=\frac{1}{x}$, obteniendo entonces que x = 1,25 × 0,45 ÷ 1 ≃ 0,56	17,0
Sin respuesta			2,8
Total			100

Para resolver esta actividad, los estudiantes deben resolver una situación simple de proporcionalidad directa. Los que eligen correctamente (opción B, 45,5%) plantean la relación de proporcionalidad y obtienen que se necesitan 0,36 litros de jugo de limón. Estos estudiantes pueden resolver la actividad planteando la cuarta proporcional $\frac{1,25}{0,45}=\frac{1}{x}$ donde x = 0,45 × 1 ÷ 1,25 (o bien aplicar el algoritmo de la regla de tres).

El 14,7% de los estudiantes elige la opción que relaciona los litros de jugo de limón mediante una resta (opción A). Mientras, un 20% responde con un valor que es un poco menor a los 0,45 dados (0,4, opción C). Estos estudiantes podrían estar identificando que, dado que la cantidad de agua es menor a la de la receta, pero no demasiado menor, la cantidad de jugo de limón también debe ser menor, aunque no demasiado menor. Sin embargo, no consideran que 0,36 litros también es una opción plausible.

Por último, el 17% de los estudiantes elige la opción D, probablemente por aplicar la regla de tres con error. Además, no identifican que la cantidad de jugo de limón debería ser menor a la de la receta y no mayor.

Esta actividad de la dimensión comprensión que corresponde al nivel 2 de desempeños exige la resolución de situaciones simples de proporcionalidad directa. En cambio, si la situación fuera más compleja, involucrando varios pasos, daría cuenta del nivel 3, como en la actividad 30.

Actividad 30 Nivel 3

Para preparar pintura de color rosa es necesario agregarle a un litro de pintura blanca un 15% de pintura roja.

Carlos tiene 3 litros de pintura blanca para preparar pintura de color rosa.

¿Cuántos litros de pintura rosa obtendrá en total?

A) 3,15 litros

B) 3,45 litros

C) 4,35 litros

D) 4,5 litros

Bloque temático		Aritmética	
Dimensión		Comprensión	
Dominio		Resuelven y modelizan situaciones que implican el uso de los números racionales y la relación de proporcionalidad	
Descriptor		Resuelven situaciones que conllevan varios pasos usando proporcionalidad directa	
Opciones		Justificación	Porcentaje de respuestas
A	3,15 litros.	Calculan el 15% de un litro de pintura blanca, que es la proporción necesaria para preparar la pintura rosa, y se lo suman a los tres litros de pintura blanca.	26,0
B	3,45 litros.	**RESPUESTA CORRECTA** Resuelven una situación de proporcionalidad en varios pasos. Calculan el 15% de un litro (0,15 l) y lo multiplican por 3, para obtener la cantidad de pintura roja necesaria para la mezcla (0,45 l). Luego se lo suman a los tres litros, obteniendo 3,45. O bien calculan el 115% de 3.	**43,5**
C	4,35 litros.	Calculan el 45% de 3 litros y se lo suman a los 3 litros de pintura blanca. Interpretan que el 15% se corresponde con 1 litro de pintura blanca, por ello multiplican 15 x 3.	11,9
D	4,5 litros.	Calculan el 15% sumando 1,5 a 3. Obtienen 4,5.	16,2
Sin respuesta			2,4
Total			100

Los estudiantes que resuelven esta actividad deben aplicar varios pasos para resolver una situación de proporcionalidad directa. El 43,5% responde correctamente (opción B), calculando la proporción de pintura roja necesaria para lograr esa proporción y obteniendo la cantidad de pintura rosa final. Estos estudiantes pueden calcular el 15% de 3 litros y luego sumarle 3 (0,45 + 3 = 3,45) o identifican que es una situación de aumento del 15% y multiplican por 1,15.

El 26% de los estudiantes responde con la opción A, sumando 0,15 litros a los 3 litros dados. Otro 11,9% considera incorrectamente 15% para cada litro y le calculan y suman el 45% a los 3 litros (opción C). Por último, el 16,2% responde con la suma de 3 y 1,5, asociándolo con el 15% (opción D).

Esta actividad, también de la dimensión comprensión, da cuenta del nivel 3 de desempeños dentro de una progresión con foco en las relaciones de proporcionalidad. Involucra la resolución de situaciones de proporcionalidad en varios pasos y continúa la progresión comentada en la actividad 29.

Dentro del bloque aritmética se incluyen también una progresión centrada en las operaciones y sus propiedades y otra que comprende las relaciones entre múltiplos y divisores. Si bien no hay ejemplos de estas progresiones en la edición de Aristas en Clase 2022, se pueden considerar las siguientes tareas de la edición 2018 para cada una.

¿Cuál es el resultado de la siguiente operación?

$$0{,}5 + 3 \times \frac{1}{4} =$$

A) 0,75
B) 0,875
C) 1,25
D) 1,625

$$\frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{4} + \frac{5}{4} \right) =$$

El resultado de esta operación es

A) $\frac{16}{8}$

B) $\frac{21}{8}$

C) $\frac{12}{14}$

D) $\frac{21}{16}$

Fuente: INEEd (2020b, pp. 70-72).

La primera actividad, de nivel 2, comprende una operación combinada simple que involucra números racionales con expresiones decimales, mientras que la segunda (de nivel 3) implica realizar las operaciones utilizando fracciones y obtener un resultado también expresado como una fracción. Si la tarea involucrara números expresados en distintos registros y las operaciones presentaran mayor dificultad (asociada a la cantidad de operaciones y paréntesis que intervienen), se ubicaría en el nivel 4 de desempeños.

Por último, la progresión del bloque Aritmética con foco en las relaciones entre múltiplos y divisores puede ejemplificarse con tareas donde los estudiantes deban justificar si es verdadera o falsa una afirmación como la siguiente: "Todos los múltiplos de 4 son múltiplos de 8". En este caso, se espera que los estudiantes identifiquen que el enunciado es falso y que si bien hay números que lo cumplen, no se puede generalizar a todos los múltiplos de 4. Esto se podría probar de forma simple con un contraejemplo: 4 es múltiplo de 4 y no es múltiplo de 8 y lo mismo para el 12, el 20, etc.

Si se quisiera potenciar la actividad, se podrían analizar las características de los números que no cumplen esta relación. Por ejemplo, representando algebraicamente los números involucrados, identificar que aquellos que no la cumplen son los que se obtienen de multiplicar 4 por un impar.

COMENTARIOS FINALES

Aristas en Clase para educación media es una herramienta que permite evaluar los desempeños de grupos de estudiantes en matemática y lectura, comparando sus resultados con los obtenidos en Aristas. Además de aportar información para comparar los porcentajes de estudiantes por nivel de desempeño, se centra en la interpretación de los descriptores que constituyen cada uno de estos niveles y los ejemplifica a partir de actividades de la prueba u otras similares.

En este documento, que apoya la herramienta Aristas en Clase en matemática en media, se presentan 30 actividades que ejemplifican las progresiones de los niveles de desempeño, atravesando los seis bloques temáticos y las tres dimensiones de la tabla de dominios de Aristas Media. Su rasgo principal radica en mostrar los procesos y procedimientos de cada actividad, que dan lugar a las características de las respuestas que pueden lograr los estudiantes. Asimismo, permite determinar el nivel donde ellos se encuentran respecto a los desempeños, tomando como referencia los resultados de la evaluación nacional Aristas Media 2022.

Aristas en Clase puede ser utilizada por los docentes de diversas maneras. Se puede aplicar como diagnóstico en los cursos de tercero de media (noveno) y primero de bachillerato, o bien para conocer el avance de los estudiantes de tercero. Al 2024 se cuenta con dos versiones de prueba de Aristas en Clase de matemática para tercero de media (2018 y 2022), por lo que el docente puede seleccionar y combinar las 60 actividades y los documentos de apoyo de ambas ediciones para complementar el diagnóstico del grupo, así como las sugerencias y estrategias compartidas. Se espera que este documento sea un insumo de valor para los docentes que enseñan matemática en el nivel medio básico.

BIBLIOGRAFÍA

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Universidad de Granada.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berna: Peter Lang.

INEEd. (2017). *Aristas. Marco de matemática en tercero de educación media*. Recuperado de https://www.ineed.edu.uy/images/Aristas/Publicaciones/Marcos/Aristas_Media_Matematica.pdf

INEEd. (2020a). *Aristas 2018. Informe de resultados de tercero de educación media*. Recuperado de https://www.ineed.edu.uy/images/Aristas/Publicaciones/Aristas2018/Aristas-2018-Informe-de-resultados.pdf

INEEd. (2020b). *Aristas en Clase: matemática en tercero de media. Documento de apoyo al docente*. Recuperado de https://www.ineed.edu.uy/images/Aristas/AristasEnClase/DocumentoDeApoyo/AristasEnClase-2018-Media-Matematica.pdf

INEEd. (2023). *Aristas 2022. Informe de resultados de tercero de educación media*. Recuperado de https://www.ineed.edu.uy/images/Aristas/Publicaciones/Aristas2022/Aristas-2022-Informe-resultados-tercero-educacion-media.pdf

Ravela, P. (2009). *¿Qué pueden aportar las evaluaciones estandarizadas a la evaluación en el aula?* Recuperado de https://repositorio.grade.org.pe/bitstream/handle/20.500.12820/392/Ravela eva_estandarizada y eval en aula.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ravela, P., Arregui, P., Valverde, G., Wolfe, R., Ferrer, G., Martínez, F., ... Wolff, L. (2008). Las evaluaciones educativas que América Latina necesita. En *Revista Iberoamericana De Evaluación Educativa*. Santiago de Chile.

Ravela, P., Arregui, P., Valverde, G., Wolfe, R., Ferrer, G., Martínez, F., ... Wolff, L. (2008). Las evaluaciones educativas que América Latina necesita. *Revista Iberoamericana De Evaluación Educativa*, 1(1), 46–63. https://doi.org/10.15366/riee2008.1.1.004

Rodríguez Rava, B. (2015). Algunas reflexiones sobre la enseñanza de la Geometría en la escuela primaria. *Quehacer Educativo*, *25*(133), 12-19. Recuperado de https://www.fumtep.edu.uy/editorial/item/1325-algunas-reflexiones-sobre-la-ensenanza-de-la-geometria-en-la-escuela-primaria

Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.

Vygotsky, L. (1978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge: Harvard University Press.